

## Die Berechnung von ein- und mehrdimensionalen FOURIERreihen mit einem mechanischen Überlagerer neuer Konstruktion.

Von VIKTOR CAIMANN und WALTER HOPPE.

(Aus dem Physikalisch-chemischen Institut der T. H. München.)

Mit 5 Textabbildungen.

(Eingegangen am 12. Oktober 1952.)

### 1. Allgemeines.

Der FOURIERSynthese von Strukturfaktoren, als Mittel der Strukturanalyse von Kristallen mit Röntgenstrahlen, kommt eine sich ständig steigernde Bedeutung zu. Während bisher die FOURIERSynthese von Strukturaldaten mehr die Rolle des „letzten Schrittes“ der Strukturanalyse hatte, in welchem die Ergebnisse einer in großen Zügen bereits aufgeklärten Struktur noch verbessert und besonders anschaulich wiederzugeben wurden, mehren sich neuerdings die Berechnungen, die die FOURIERSynthese auch zur Bestimmung der Struktur in ihren Grundzügen zu verwenden. Vom Endpunkt der FOURIERSynthese geht die Bestimmung der Struktur auf die Bestimmung der Phasen der Strukturfaktoren hinaus, deren Amplituden aus den Intensitäten der Röntgenstreureflexe ablesbar sind. In den zumeist vorkommenden Fällen von zentrosymmetrischen Kristallen reduziert sich die Vieldeutigkeit der Phase auf eine Zweideutigkeit, die in der Unbestimmtheit des Vorzeichens des FOURIERgliedes zum Ausdruck kommt. Man kann nun versuchen, durch eine geordnete Permutation der Vorzeichen der FOURIERglieder zur Struktur zu gelangen; hierfür liegen Vorschläge vor [1], [2]. Andere Verfahren gehen von bestimmten Zusammenhängen zwischen den Vorzeichen von FOURIERreihen aus, die in gewissen Ungleichungen ausdrückbar sind [3], [4], während schließlich wesentliche Fortschritte in der Anwendung der bekannten Verfahren von PATTERSON und PATTERSON-MARKER erzielt wurden [5], die bereits in ihrer ursprünglichen Form zu den Standardverfahren der Strukturanalyse zu zählen waren. Da die Aufsummierung mehrdimensionaler FOURIERreihen sehr lästig und zeitraubend ist — auch wenn sie mit Hilfsmitteln wie Rechenschiebern, Bürorechenmaschinen, Nomogrammen, vorbereiteten Tabellen der Sinuswerte usw. durchgeführt wird — und da bei numerischen Berechnungen derart großen Umfanges sinnstörende Rechenfehler leicht möglich sind, ist es verständlich, daß der automatische FOURIERSynthese durch geeignete Rechengeralte von verschiedenen Seiten besonderes Augenmerk zugewendet wurde.

Die automatische Berechnung mehrdimensionaler FOURIERSynthesen kann man in zwei große Gruppen einteilen:

I. Durchführung der Rechnung in Lochkartenmaschinen und programmgesteuerten Rechenautomaten.

II. Nachbildung der Rechnung in Analogiegeräten der mehrdimensionalen Synthese.

Das Aufstellen institutseigener Rechenautomaten nach I. ist wegen des hohen Aufwandes in den meisten Fällen unmöglich. Die Rechenarbeit erfolgt deshalb

meist mietweise in Zentralstellen. Als Beispiel für die Rechengeschwindigkeit sei erwähnt, daß der elektronische Rechenautomat EDSAC zur Berechnung von 2000 Stützstellen einer zweidimensionalen Synthese mit 400 Strukturfaktoren 1,5 Stunden benötigt [6]. Die Rechenzeiten der Lochkartenmaschinen und der elektromechanischen Automaten sind bedeutend höher. Spezielle Analogiegeräte zur mehrdimensionalen FOURIERSynthese nach II sind ebenfalls sehr kompliziert (vergl. z. B. das elektronische Gerät nach [7]) und in ihrer Arbeitsweise häufig so ungenau, daß eine numerische Berechnung des Endresultates nicht vermieden werden kann.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß ein Rechenggerät, welches die Präzision digitaler Methoden mit der Anschaulichkeit von Analogieverfahren verbindet, welches leicht bedienbar und gering im Aufwand ist, in der Praxis der Strukturanalyse noch fehlt.

### 2. Ein mechanisches Gerät zur FOURIERSynthese.

Von dem einen von uns (HOPPE) wurde ein neues mechanisches Analogieprinzip zur Überlagerung von FOURIERreihen angegeben [8]. Nach einem zuerst vorliegenden Entwurf war ein zweidimensionales Gerät geplant. Während der Entwicklung eines eindimensionalen Vorgerätes stellte es sich jedoch heraus, daß die Vorteile, welches ein zweidimensionales Gerät bietet, seinen wesentlich höheren Aufwand kaum rechtfertigen<sup>1</sup>. Man muß hierbei berücksichtigen, daß auch zwei- und dreidimensionale Synthesen mit einem eindimensionalen Gerät bequem gerechnet werden können, wenn die Durchrechnung, Ablesung, Kombination usw. von eindimensionalen Teilreihen (in welche die mehrdimensionale Reihe aufgelöst werden muß) übersichtlich und schnell möglich ist. Die Anpassung des Gerätes an das eigentlich mehrdimensionale Syntheseproblem wird damit zu einer wichtigen Teilaufgabe der Entwicklung.

### 3. Das Prinzip des Überlagerers.

Es gibt zur Überlagerung von FOURIERwellen zwei verschiedene Methoden, die sich durch den Elementarrechenvorgang grundsätzlich unterscheiden:

I. *Gleichzeitig* werden für einen Punkt des Funktionsintervalles sämtliche FOURIERglieder bestimmt und addiert. *Nacheinander* werden für eine genügende Anzahl von Punkten (Stützpunkten) diese Berechnungen durchgeführt und registriert.

<sup>1</sup> Die Entwicklung, Konstruktion und der Bau der Geräte erfolgte gemeinsam mit Herrn Dr.-Ing. K. PANNKE in dessen Werkstätten Karlsruhe-Durlach, wobei seine jahrzehntelange Erfahrung auf dem Gebiet von stetigen Rechenmaschinen für die Lösung des Problems sehr förderlich war.



II. Gleichzeitig wird für eine genügende Anzahl von Punkten im Funktionsintervall ein einziges FOURIERglied bestimmt und hinzuaddiert. Nacheinander werden diese Berechnungen für alle FOURIERglieder durchgeführt.

Im Falle II erspart man sich meist die Registrierung, da nach Durchführung der Rechnung sämtliche Stützpunktergebnisse gleichzeitig und nebeneinander im Gerät vorliegen. Ferner besitzen die Anordnungen nach II einen methodischen Vorteil. Will man eine Überlagerung von  $n$  Gliedern mit der Überlagerung von  $n+1$  Gliedern vergleichen, so sind nach Verfahren I

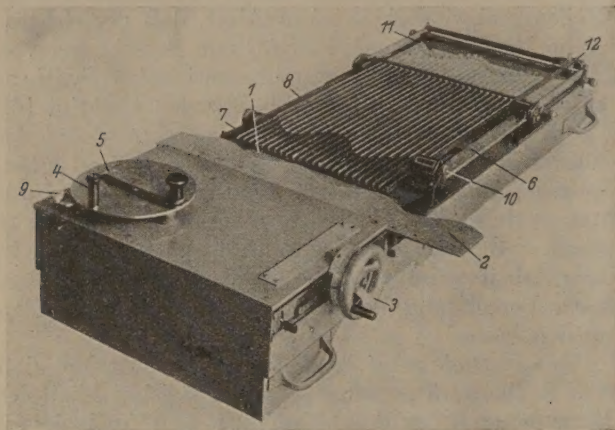


Abb. 1. Der FOURIERSynthetisator nach W. HOPPE Modell A.  
Eingehende Beschreibung siehe Text.

zwei völlig getrennte Rechnungen erforderlich, während nach II nur die Hinzufügung des Gliedes der Nummer  $n+1$  nötig ist. Derartige Vergleiche spielen in der Kristallstrukturanalyse eine bestimmte Rolle.

Es ist relativ einfach, eine Sinusschablone durch Abtastvorrichtungen an mehreren Stützstellen abzugreifen und alle Ordinatenwerte in Zählwerke (z. B. Zählrollen) einzugeben. Hingegen bereitet es nicht unbeträchtliche konstruktive Schwierigkeiten, bei dieser Addition genügend einfach und genau eine Multiplikation mit der Amplitude des FOURIERgliedes gleichzeitig durchzuführen. In dem beschriebenen FOURIERüberlagerer wird nach dem neuen Vorschlag diese Multiplikation durch eine entsprechende Umformung der aufzusummierenden Reihen in FOURIERreihen mit konstanten Amplitudenwerten überhaupt vermieden. Dies ist möglich, wenn in geeigneter Weise über die Phasen der FOURIERglieder verfügt wird. Der Wegfall der sonst für alle Stützpunkte erforderlichen Multiplikationseinrichtungen vereinfacht die Konstruktion des Überlagerers sehr beträchtlich. Wir gehen von der Reihe

$$\varrho(x) = \sum_{h=0}^n A(h) \sin [2\pi h x + \vartheta(h)] \quad (1)$$

aus, die man bekanntlich in zwei Teilreihen mit den konstanten Phasen  $\pi/2$  (Cosinusreihe) und 0 (Sinusreihe) aufspalten kann. Wir zeigen, daß eine abgeänderte Aufspaltung zu Reihen mit konstanten Amplituden  $A$  und laufzahlabhängigen Phasen  $\vartheta'(h)$ ,  $\vartheta''(h)$  führt. Wir zerlegen (1) in

$$\varrho(x) = A \left\{ \sum_{h=1}^n \sin [2\pi h x + \vartheta'(h)] + \sum_{h=1}^n \sin [2\pi h x + \vartheta''(h)] \right\} + a_0 \quad (2)$$

mit

$$\vartheta'(h) = \vartheta(h) + \bar{\vartheta}(h)/2$$

$$\vartheta''(h) = \vartheta(h) - \bar{\vartheta}(h)/2$$

$$\bar{\vartheta}(h) = 2 \arccos \frac{A(h)}{2A}$$

Statt von der Reihe (1) auszugehen, kann man auch die Sinus- und Cosinusteilreihen entsprechend legen, wobei statt  $\vartheta(h)$  0 bzw.  $\pi/2$  einzusetzen. Es folgt

$$\varrho(x) = A \sum_{h=1}^n \left\{ \sin \left[ 2\pi h x + \frac{\bar{\vartheta}(B, h)}{2} \right] + \sin \left[ 2\pi h x - \frac{\bar{\vartheta}(A, h)}{2} \right] \right\} + B \sum_{h=1}^n \left\{ \cos \left[ 2\pi h x + \frac{\bar{\vartheta}(B, h)}{2} \right] + \cos \left[ 2\pi h x - \frac{\bar{\vartheta}(A, h)}{2} \right] \right\} + a_0$$

Diese Form der Zerlegung wird in dem gebauten FOURIERSynthetisator verwendet.

#### 4. Beschreibung der Rechenmaschine.

Die Rechenmaschine stellt die Sinusfunktionen Reihen (2)–(6) dar. Um aus konstruktiven Gründen eine konstante maximale Steilheit der Sinusschablonen zu erhalten, sind ihre Amplituden nicht wie in den Reihen (2)–(6) untereinander gleich, sondern von der Ordnungszahl  $h$  nach

$$A'(h) = \frac{A}{h}$$

mit Abänderung von (5) in

$$\bar{\vartheta}(h) = 2 \arccos \frac{h A(h)}{2A}$$

abhängig. Im Laufe einer Rechnung werden die einzelnen Sinusschablonen nacheinander in das Gerät eingelegt und abgetastet. Zur Abtastung dienen 24 automatische Rechenschieber, wobei eine Rückführmechanismus dafür sorgt, daß negative Sinuswerte auch negativ in diese Rechenschieber eingegeben werden können. Man kann daher mit einem beschränkten Resultatintervall auskommen und hat den Vorteil, daß die Resultatskurve in den Resultatnadeln des Gerätes anschaulich dargestellt wird, was bei Verwendung von Zählrollen statt Rechenschieber nicht der Fall wäre.

Abb. 1 zeigt eine Gesamtansicht des Gerätes. Es besteht aus drei Teilen:

- Einstellteil mit Schablonenschlitten
- Abtasteil mit Antrieb
- Ableseil mit Nullstelleinrichtung.

Der Schablonenschlitten 1 trägt die auswechselbaren Sinusschablone 2, die durch Zapfen in vier verschiedenen Stellungen (+ cos, - cos, + sin, - sin) aufgesetzt werden kann. Der Einstellteil enthält ferner ein Rechengetriebe für die an die Stelle von Amplitudeneinstellung tretenden Phaseinstellungen, welche durch die Kurbeln 3, 4 und 5 betätigt wird. Der Abtasteil enthält den Abtastschlitten 6 mit Rückführmechanismus, der 24 Rechenschieber trägt, welche jeweils eine Abtastleiste 7 und einer Rechennadel 8 aufweisen. Bei Drücken des Knopfes 9 wird die Sinusfunktion durch einen motorgesteuerten Hin- und Rückgang des Schlittens 6 abgetastet und in die Rechenschieber additiv eingegeben. Das Zählwerk 10



tiert die Anzahl der Maschinenoperationen und die Gliederzahl der berechneten Reihen. Das Ergebnis wird im Ablese teil durch die Köpfe 11 der Kurbeln 8 dauernd anschaulich angezeigt und — wenn erforderlich — parallaxenfrei an dem schiebbaren Maßstab 12 Nadel für Nadel abgelesen in Tabellen notiert werden. Unter die Nadeln ein Blatt Papier zur Registrierung der Nadelstellungen gelegt werden, ebenso ist es möglich, die Nadelungen laufend zu photographieren und die Aufnahmen in einem Meßprojektor nachträglich auszuwerten. Das letztere Verfahren ist insbesondere bei Anwendung der FOURIERSynthese zur systematischen Strukturanalyse (Vorzeichenpermutationen) praktisch. Eingabe eines FOURIERgliedes geht folgendermaßen sich:

Die Sinusschablone der entsprechenden Wellenlänge wird vorzeichengetreu auf den Schablonentisch gesetzt. Dann wird die Kurbel 5 auf die Nummer betreffenden Schablone auf der Skala von 4 gestellt. Nun ist nur noch der FOURIERkoeffizient mittels Kurbel 3 einzustellen. Sein Einstellwert kann bei dem Modell einer graphischen Darstellung des Zusammenhanges von  $A(h)$  und  $\vartheta(h)$  entnommen werden; ebenso kann aber auch die Skala von 4 als Funktionskala ausgebildet werden. Durch Betätigung des Knopfes 9 und der Kurbel 4 wird die Rechenoperation ausgeführt. Es sind 14 Sinusschablonen vorhanden, so daß 14 Grundoperationen der beschriebenen Art (die sich in wenigen Minuten ausführen lassen) Berechnung einer eindimensionalen Reihe erforderlich sind.

##### 5. Die Genauigkeit des Gerätes.

a) *Allgemeines.* Die Additionsrechenschieber besitzen einen beschränkten Ordinatenbereich (170 mm). In die Apparatgenauigkeit bestmöglichst auszunützen, sollten die eingegebenen FOURIERamplituden so gewählt werden, daß die Resultatkurve das Ordinatenintervall möglichst ausfüllt. Diese Bedingung ist wegen Unkenntnis der Resultatkurve nur annähernd zu erfüllen und erfordert eine gewisse Übung im Abschätzen des Maßstabes der Eingabe. Bei Berechnung von mehrdimensionalen Synthesen können verschiedene Maßstäbe für die Teilreihen günstig sein. Am einfachsten gelangt man zu diesen, wenn man zunächst eine approximative Synthese im sicherlich zu kleinen Maßstab ausführt und aus dieser die günstigsten Proportionalitätsfaktoren für eine genauere Synthese bestimmt.

Freilich ist diese Begrenzung des Funktionsintervalls ein nicht unbeträchtlicher Nachteil der speziell verwendeten Rechenschieber, deren Konstruktion daher in Modell II (siehe später) entsprechend abgeändert wurde. Man kann natürlich auch mit Zählrollen eine Erweiterung des Funktionsbereiches erhalten, doch wurde auf ihre Verwendung grundsätzlich verzichtet, da die anschauliche Darstellung des Resultates und eine Registrierung als „Kurve“ gerade für die Strukturanalyse von gewissem Wert ist.

b) *Der Einstellteil.* Die Genauigkeit des Einstellteiles setzt sich zusammen aus der Genauigkeit der Rechengetriebe 3, 4, 5 und der Genauigkeit der verwendeten Sinusschablonen. Während die Fehler des Rechengetriebes, der Schablonenschlittenführung usw. innerhalb der Apparatgenauigkeit nicht bemerkbar wurden, war die Präzision der verwendeten Sinusscha-

blonen (maximale Ordinate 25 mm) noch nicht voll befriedigend. Bei vielen Schablonen des gebauten Gerätes zeigte sich insbesondere ein positiver systematischer Fehler (die Ordinaten waren etwas zu groß). Es ist bemerkenswert, daß durch Anwendung einer später beschriebenen Kompensationsmethode trotz dieser relativ ungenauen Schablonen sehr gute Rechenresultate erzielt wurden.

c) *Der Abtastteil.* Die Rechenschieber des Abtastteiles, bestehend aus Abtastleiste und Rechennadel, werden im Gange der Rechnung gekuppelt und wieder entkuppelt. Sie sind auch insofern von Interesse, als sie beim beschriebenen Gerät eigentlich „digital“ und nicht „stetig“ arbeiten. Denn ihre Rechennadeln sind in Abständen von 0,25 mm mit scharfen Rillen versehen, die sich beim Kuppeln auf Schneiden der Abtastleiste aufsetzen. Hierdurch wird erreicht, daß der stetig aus dem Eingabeteil abgetastete Längenwert stets auf  $\pm 0,125$  mm abgerundet wird. Auf eine Länge des Funktionsintervalles von 170 mm enthält eine Nadel 680 Rillen, so daß man den Rechenschieber auch als einstellige digitale Rechenmaschine auffassen kann, die allerdings nicht in einem Zahlensystem der Grundperiode 10, sondern der Grundperiode 680 arbeitet. Dieses Rillenprinzip garantiert — sofern Überschleuderungen vermieden werden — eine, innerhalb des Abrundefehlers definierte Addition. Es wurde aus konstruktiven Gründen gewählt, da es eine sehr einfache Kupplung (Aufsetzen der Nadeln auf die Abtastleisten) ermöglicht, wird jedoch in Modell II aus Genauigkeitsgründen wieder verlassen. Das einwandfreie Arbeiten der Kupplungen und Schlitten des Abtastteiles so wie das Fehlen von Überschleuderungen läßt sich prüfen durch Einsetzen eines Nulllinienlineals in den Schablonenschlitten. Bei richtiger Justierung müssen die Rechennadeln auch nach beliebig vielen Maschinenoperationen „stehen“, da sich kleine Rechenfehler nicht aufsummieren können, sondern immer wieder durch die Abrundung ausgeschaltet werden. Daher ist auch diese Justierung nur bis zum Abrundefehler möglich, eventuelle kleinere Justierfehler werden nicht sichtbar, machen sich aber als systematische Fehler bei der Durchführung der Synthese bemerkbar. Dieser grundsätzliche Nachteil des digitalen Additionprinzips läßt sich allerdings ebenfalls durch das erwähnte Kompensationsverfahren beseitigen.

d) *Zusammenarbeit von Einstellteil und Abtastteil.* Man gewinnt am einfachsten einen Überblick über die systematischen Fehler bei der Eingabe eines FOURIERgliedes, wenn man eine Sinusschablone mehrmals mit den Phasen 0 und  $\pi$  addiert, arbeitet das Gerät völlig fehlerfrei, so sollten nach diesen Operationen sämtliche Rechennadeln den Wert Null anzeigen. Eine Durchprüfung mit sämtlichen Sinusschablonen ergab einen Fehler in positiver Richtung, der sich aus dem Schablonenfehler und dem (für alle Schablonen konstanten) Justierfehler der Rechenschieber zusammensetzt. Es ist hierbei zu bemerken, daß sich diese Fehler bei mehreren Maschinengängen nicht statistisch ausmitteln, da immer je zwei gleiche Stellen der Schablonen zur Abtastung gelangen. Diese Folgerung gilt aber nur approximativ da sie eine sehr exakte Rillung der Nadeln voraussetzt. In Tabelle 1 sind die Abweichungen vom Werte Null nach 10 Arbeitsgängen für die beste und die schlechteste Sinusschablone angeführt.



Tabelle 1.

Schablone 6	2,1	1,2	1,3	1,2	1,8	1,0	1,2	1,3	2,8	1,3	1,0	1,0
	1,0	0,7	1,4	1,0	1,3	1,6	1,4	1,8	2,1	1,2	2,3	2,3
Schablone 7	0,5	0,2	0,7	0,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,5	0,4	0,4	0,1
	1,0	0,3	0,1	0,0	0,5	0,5	0,0	0,1	0,3	0,5	0,0	0,6
Nummer der Nadel	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

Die Tabelle gibt die Abweichung von der Nullstellung nach zehnmaliger Addition und Subtraktion einer Sinusschablone. Weitere Prüfungen betrafen den Einfluß der Steilheit der Sinusschablonen so wie die Reproduzierbarkeit der Synthesen zur Trennung des systematischen Fehlers vom statistischen Fehler.

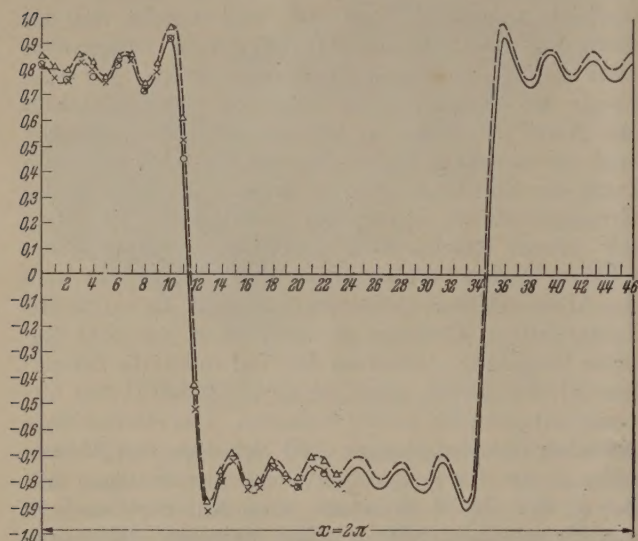


Abb. 2. Rechteckkurve (b).

Die gestrichelte Kurve verbindet die unmittelbar aus dem Gerät erhaltenen Werte ( $\Delta$ ) während die ausgezogene Kurve nach Anwendung des Kompensationsverfahrens gewonnen wurde ( $\times$ ). Die mit  $\circ$  bezeichneten Punkte entsprechen den theoretischen Werten. Auf der Abszisse sind die Stützpunkte der Maschine markiert.

e) *Ablese teil mit Nullstelleinrichtung.* Zu Beginn der Rechnung werden die Meßnadelköpfe durch ein geschliffenes Lineal ausgerichtet. Sie sind aus Plexiglas und tragen eine Rillung, so daß parallaxenfrei am Maßstab abgelesen werden kann. Dieser ist mit einer Millimeterteilung versehen, Zehntelmillimeter sind schätzbar.

#### 6. Die Gewinnung von Zwischenintervallwerten.

Die Einteilung des Abszissenintervalles in 24 Stützpunkte ist für viele Zwecke zu grob. Das Gerät enthält daher eine Vorrichtung zur Verschiebung des Schablonenschlittens um den halben Abstand zweier Stützpunkte, so daß in zwei aufeinanderfolgenden Synthesen 47 Stützpunkte berechnet werden können.

#### 7. Das Kompensationsverfahren.

Zur Ausschaltung der nicht unbeträchtlichen systematischen Fehler der Sinusschablonen wurde von dem einen von uns (CAIMANN) ein Kompensationsverfahren vorgeschlagen, das überraschend genaue Resultate lieferte. Es wird außer der normalen Reihe auch das „Spiegelbild“ der Reihe berechnet, indem die Vorzeichen sämtlicher FOURIERkoeffizienten umgekehrt werden. Die Durchführung dieser zweiten Reihensummierung erfordert nur wenig Zeit, da keine Vorberei-

tungsarbeiten für Anpassung der Glieder usw. nötig sind. Der Absolutwert einer Ordinate ist dann gleich dem arithmetischen Mittel der Absolutwerte der Ordinaten beider Synthesen an den betreffenden Stützpunkt. Im Falle der Synthese von schiefssymmetrischen Funktionen kann die zweite Summierung erspart werden, da die genannte Mittelung gleicher Ordinaten entgegengesetztem Vorzeichen an einer einzigen Funktionskurve wegen ihrer Symmetrie durchführbar

#### 8. Rechenbeispiele.

Es wurden eine Anzahl von Rechenbeispielen wohl in der Maschine wie numerisch berechnet und Resultate verglichen.

##### a) Rechteckkurve a.

$$f(x) = A \quad 0 < x < \frac{1}{2}$$

$$f(x) = -A \quad \frac{1}{2} < x < 1.$$

Ihre FOURIERentwicklung lautet:

$$f(x) = \frac{4A}{\pi} \left( \sin 2\pi x + \frac{1}{3} \sin 2\pi 3x + \frac{1}{5} \sin 2\pi 5x + \dots \right).$$

Diese Funktion ist besonders bequem in der Maschine berechenbar, da die Amplituden der Sinusschablonen bereits nach der Reihe  $1, 1/2, 1/3, 1/4 \dots$  abgestuft sind. Tabelle 2 zeigt das Resultat der Rechnung. Man beachte die beträchtlichen Abweichungen der unmittelbar erhaltenen Werte (hervorgehoben durch  $\times$ ) vom systematischen Fehler der Sinusschablonen) welche durch Anwendung des Kompensationsverfahrens praktisch völlig beseitigt werden.

##### b) Rechteckkurve b.

$$f(x) = A \quad 0 < x < \frac{1}{4}$$

$$f(x) = -A \quad \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}$$

$$f(x) = A \quad \frac{3}{4} < x < 1.$$

FOURIERentwicklung:

$$f(x) = \frac{4A}{\pi} \left( \sin 2\pi x - \frac{1}{3} \cos 2\pi 3x - \frac{1}{5} \cos 2\pi 5x - \dots \right).$$

Die Ergebnisse zeigt Abb. 2.<sup>1</sup>

##### c) Sägekurve.

$$f(x) = A - 2Ax \quad 0 < x < 1.$$

FOURIERentwicklung:

$$f(x) = \frac{2A}{\pi} \left( \sin 2\pi x + \frac{1}{2} \sin 2\pi 2x + \frac{1}{3} \sin 2\pi 3x + \dots \right).$$

Das Ergebnis zeigt Tabelle 3.

<sup>1</sup> Durch ein Mißverständnis bei der Konstruktion wurde das Resultatintervall irrtümlich nicht in 24, sondern in 23 Intervalle unterteilt (bzw. mit Zwischenwerten 46 Intervalle). Dies ist beim Lesen der Figuren zu beachten. Auf die Anwendung des Gerätes hat diese kleine Verringerung der Stützpunktaufösung kaum einen Einfluß.



Tabelle 2.

zpunkt	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ch. Werte	0,052	0,940	0,790	0,804	0,840	0,794	0,832	0,818	0,802	0,872	0,668	0,862
zpunkt	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12
ch. Werte	0,020	−0,854	−0,740	−0,716	−0,796	−0,708	−0,772	−0,760	−0,706	−0,820	−0,704	−0,716
apens. Werte	0,036	0,897	0,765	0,760	0,809	0,751	0,802	0,789	0,754	0,846	0,736	0,789
or. Werte	0,000	0,895	0,764	0,765	0,821	0,750	0,805	0,788	0,754	0,841	0,719	0,783

Tabelle 3.

zpunkt	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ch. Werte	0,08	1,70	1,34	1,16	1,13	0,94	0,78	0,69	0,52	0,43	0,30	0,12
zpunkt	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12
ch. Werte	0,00	−1,55	−1,24	−1,03	−1,01	−0,79	−0,66	−0,58	−0,38	−0,32	−0,17	0,05
apens. Werte	0,040	1,626	1,290	1,096	1,060	0,864	0,720	0,636	0,450	0,378	0,236	0,084
or. Werte	0,000	1,628	1,290	1,099	1,080	0,854	0,743	0,650	0,453	0,358	0,216	0,036

d) Parabelbogen.

$$f(x) = A - 4 A \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \qquad 0 < x < 1. \qquad (15)$$

legungsformel

$$\cos (\alpha + \beta + \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma (20)$$

URIERentwicklung:

$$)= \frac{4 A}{\pi^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \cos 2 \pi x - \frac{1}{2^2} \cos 2 \pi 2 x - \frac{1}{3^2} \cos 2 \pi 3 x - \dots \right). \qquad (16)$$

e Ergebnisse der Rechnungen zeigt Abb. 3.

9. Mehrdimensionale Synthese.

In der Literatur sind öfters Zerlegungen von zweidimensionalen Reihen in eindimensionale Teilhen angegeben worden [9], [10]. Wir folgen imessentlichen der Ableitung bei [10].

Gegeben sei die dreidimensionale FOURIERreihe

$$f(x, y, z) = \left. \begin{aligned} &\sum_{h=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} a_{hkl} \cos 2 \pi (h x + k y + l z) \\ &+ \sum_{h=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} b_{hkl} \sin 2 \pi (h x + k y + l z). \end{aligned} \right\} \qquad (17)$$

ir beschränken uns im Weiteren auf Kristalle mitntrosymmetrie; es gilt daher:

$$f(-x, -y, -z) = f(x, y, z)$$

d es entfallen die Sinusglieder in (17) (Zweideutig- it der Phase). Die dreidimensionale Reihe geht nun die Form über:

$$f(x, y, z) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_{hkl} \cos 2 \pi (h x + k y + l z). \qquad (18)$$

n folgenden machen wir von der kristallographischen ung Gebrauch, das negative Vorzeichen über das aufzählensymbol zu setzen. Da die Beziehungen lten:

$$\begin{aligned} a_{hkl} &= a_{\bar{h}\bar{k}\bar{l}} \\ a_{\bar{h}kl} &= a_{h\bar{k}\bar{l}} \\ a_{h\bar{k}l} &= a_{\bar{h}k\bar{l}} \\ a_{h\bar{k}\bar{l}} &= a_{\bar{h}kl} \end{aligned}$$

st sich unter Benutzung der trigonometrischen Zer-

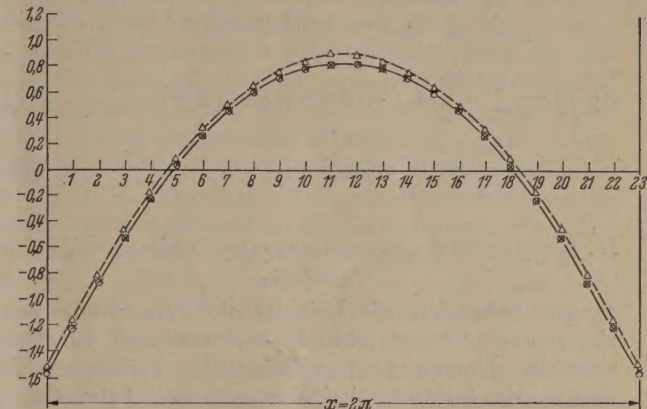


Abb. 3. Parabelbogen (Zeichenerklärung s. Abb. 2).

die Reihe (18) schließlich folgendermaßen aufspalten:

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, z) &= \\ &= \sum_{h=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} A_{hkl} \cos 2 \pi h x \cos 2 \pi k y \cos 2 \pi l z \\ &+ \sum_{h=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} B_{hkl} \sin 2 \pi h x \sin 2 \pi k y \cos 2 \pi l z \\ &+ \sum_{h=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} C_{hkl} \sin 2 \pi h x \cos 2 \pi k y \sin 2 \pi l z \\ &+ \sum_{h=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} D_{hkl} \cos 2 \pi h x \sin 2 \pi k y \sin 2 \pi l z \end{aligned} \right\} \qquad (21)$$

wobei bedeutet:

$$\left. \begin{aligned} A_{hkl} &= 2 (a_{h\bar{k}\bar{l}} + a_{\bar{h}k\bar{l}} + a_{h\bar{k}l} + a_{\bar{h}kl}) \\ B_{hkl} &= 2 (-a_{h\bar{k}\bar{l}} - a_{\bar{h}kl} + a_{h\bar{k}l} + a_{\bar{h}\bar{k}l}) \\ C_{hkl} &= 2 (a_{h\bar{k}\bar{l}} - a_{\bar{h}kl} + a_{h\bar{k}l} - a_{\bar{h}\bar{k}l}) \\ D_{hkl} &= 2 (a_{h\bar{k}\bar{l}} - a_{\bar{h}kl} - a_{h\bar{k}l} + a_{\bar{h}\bar{k}l}) \\ A_{h00} &= 2 (a_{h\bar{k}0} + a_{\bar{h}k0}) \\ A_{h0l} &= 2 (a_{h0l} + a_{\bar{h}0l}) \\ A_{0kl} &= 2 (a_{0kl} + a_{0\bar{k}l}) \\ A_{h00} &= 2 a_{h00} \\ A_{0k0} &= 2 a_{0k0} \\ A_{00l} &= 2 a_{00l} \\ A_{000} &= a_{000} \end{aligned} \right\} \qquad (22)$$

(Forts. d. Formel 22 S. 126)



(Forts. d. Formel 22 v. S. 125)

$$\begin{aligned}
 B_{hk0} &= 2(a_{h\bar{k}0} - a_{hk0}) \\
 C_{h0l} &= 2(a_{h0\bar{l}} - a_{h0l}) \\
 D_{0kl} &= 2(a_{0k\bar{l}} - a_{0kl}) \\
 B_{h0l} &= B_{0kl} = B_{0k0} = B_{h00} = C_{hk0} = C_{0kl} = \\
 &= C_{h00} = C_{00l} = D_{hk0} = D_{h0l} = D_{00l} = D_{0k0} = 0.
 \end{aligned}$$

Um zweidimensionale Projektionen der dreidimensionalen Dichteverteilung auf die Ebenen (00l), (0k0) und (h00) zu erhalten, werden nur die FOURIERglieder der Indizierung (hk0), (h0l) und (0kl) nach (21) summiert, wobei sich (21) reduziert zu

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \sum_{h=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} A_{hk0} \cos 2\pi h x \cos 2\pi k y \\
 &+ \sum_{h=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} B_{hk0} \sin 2\pi h x \sin 2\pi k y, \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x, z) &= \sum_{h=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} A_{h0l} \cos 2\pi h x \cos 2\pi l z \\
 &+ \sum_{h=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} C_{h0l} \sin 2\pi h x \sin 2\pi l z, \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(y, z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} A_{0kl} \cos 2\pi k y \cos 2\pi l z \\
 &+ \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} D_{0kl} \sin 2\pi k y \sin 2\pi l z. \quad (25)
 \end{aligned}$$

### 10. Vorgang bei der Berechnung einer zweidimensionalen Synthese.

Wir behandeln als Beispiel die Berechnung von  $f(x, y)$  nach Formel (23). In der benutzten Rechenmaschine können 14 FOURIERglieder berücksichtigt werden, die Summen sind also nach dem 14ten Glied abzubrechen.

Wir setzen

$$f_1(x, y) = \sum_{h=0}^{14} \sum_{k=0}^{14} A_{hk0} \cos 2\pi h x \cos 2\pi k y, \quad (26)$$

$$f_2(x, y) = \sum_{h=0}^{14} \sum_{k=0}^{14} B_{hk0} \sin 2\pi h x \sin 2\pi k y. \quad (27)$$

$$f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y). \quad (28)$$

und schreiben nun  $f_1(x, y)$  in der Form

$$f_1(x, y) = \sum_{h=0}^{14} c_{h,y} \cos 2\pi h x \quad (29)$$

mit

$$c_{h,y} = \sum_{k=0}^{14} A_{hk0} \cos 2\pi k y \quad (30)$$

und  $f_2(x, y)$  analog

$$f_2(x, y) = \sum_{h=0}^{14} s_{h,y} \sin 2\pi h x \quad (31)$$

mit

$$s_{h,y} = \sum_{k=0}^{14} B_{hk0} \sin 2\pi k y. \quad (32)$$

Wir berechnen nun die Teilreihen  $c_{h,y}$  und  $s_{h,y}$  für sämtliche Werte von  $h$  (also insgesamt 28 Teilreihen) in der Maschine und ordnen die abgelesenen Stützstellen in einer Tabelle mit  $2 \times 14$  Zeilen (entsprechend der Variablen  $h$ ) und 24 Kolonnen (entsprechend den 24 Stützpunkten für die Variablen  $y$ ) an. Jede Zeile enthält also gerade die Ergebnisse einer Teilreihe.

In einem zweiten Rechengang berechnen wir nun die Teilreihen

$$f(x, y) = \sum_{h=0}^{14} c_{h,y} \cos 2\pi h x + \sum_{h=0}^{14} s_{h,y} \sin 2\pi h x \quad (33)$$

(insgesamt also 24 Teilreihen für alle Stützpunkte von  $y$ ) und ordnen die abgelesenen Werte in einer Tabelle mit 24 Kolonnen (entsprechend der Variablen  $x$ ) und 24 Zeilen (entsprechend der Variablen  $y$ ) an und halten so 576 Stützpunkte der zweidimensionalen Synthese. Hierbei ist für jede Teilreihe nur nötig,  $2 \times 14$  übereinanderstehende Werte einer Kolonne der vorher erhaltenen Tabelle zu überlagern. Wie bereits aus dieser Beschreibung hervorgeht, läßt sich die zweidimensionale Synthese sehr übersichtlich und mit minimalem Aufwand an weiteren Rechenhilfsmitteln und ohne Verwendung von anderen Rechenoperationen als „Einstellen“ und „Ablesen“ bzw. „Eingeben“ durchführen, wenn einmal die  $A_{hk0}$  und  $B_{hk0}$  aus den  $a_{hk0}$  berechnet wurden. Diese hier nötigen einfachen Summationen lassen sich aber sehr rasch durchführen. Es empfiehlt sich hierbei vor der Berechnung die Werte  $A_{hk0}$  und  $B_{hk0}$  in zwei Tabellen mit 14 Zeilen und 14 Kolonnen entsprechend der Variablen  $h$  und  $k$  anzuordnen, um die genannten Rechengänge möglichst zu mechanisieren (in jeder Teilreihe werden einfach die FOURIERglieder einer Zeile überlagert).

Es ist nun von großem Interesse, die Rechenarbeit dieser Art der Synthese mit der direkten Synthese an einem hypothetischen zweidimensionalen Rechengerät zu vergleichen, das nach den gleichen Prinzipien wie unser eindimensionales Gerät aufgebaut sein sollte. Es sei dabei angenommen, daß eine „Grundrechenoperation“ (Einstellung und Eingabe eines FOURIERgliedes) bei beiden Maschinen gleichviel Zeit benötigt. Nun läuft die unmittelbare zweidimensionale Summation analog der Formel (18) von  $h = \overline{14}$  bis  $h = 14$  und von  $k = \overline{14}$  bis  $k = 14$ , es sind im zweidimensionalen Gerät also insgesamt 784 Grundrechenoperationen erforderlich. Die beschriebene Art der Synthese benötigt im ersten Rechengang 28 Teilreihen mit je 14 Gliedern, im zweiten Rechengang 24 Teilreihen mit je 28 Gliedern, insgesamt sind 1064 Grundrechengänge erforderlich. Der Mehraufwand an reiner Einstell- und Rechenzeit ist also unbedeutend. Hinzu kommt allerdings zusätzlich noch die Zeit der Ablesung, welche für die Tabelle der  $c_{h,y}$  und  $s_{h,y}$  erforderlich ist und die Zeiten der Berechnung von  $A_{hk0}$  und  $B_{hk0}$ . Zeiten, die aber nicht sehr ins Gewicht fallen. Wenn man noch berücksichtigt, daß einerseits der Organisationsplan der beschriebenen zweidimensionalen Synthese so übersichtlich und einfach ist, daß kaum Rechenirrtümer entstehen können, während andererseits ein zweidimensionales Gerät einen größenordnungsmäßig höheren Aufwand erfordert und außerdem sicher nicht in der gleichen Genauigkeit gebaut werden kann als ein eindimensionales Gerät, so wird man kaum der direkten zweidimensionalen Synthese besondere Vorzüge zubilligen können.

Es ist weiterhin von Interesse, den Anteil der reinen Rechenzeit der Maschine abzuschätzen. Zur Eingabe eines FOURIERgliedes sind im gebauten Modell zwei Maschinenoperationen von je 4 Sekunden nötig; die gesamte Maschinenzeit beträgt bei der zw



nsionalen Maschine 1<sup>h</sup> 46<sup>min</sup>, bei der eindimen-  
len Maschine 2<sup>h</sup> 22<sup>min</sup> 1.  
im diese Zeiten würde also ein gleichartiges aber  
s (z. B. elektronisch) rechnendes Analogie-Gerät  
eller rechnen — unter der Annahme, daß Einstell-  
Ablesezeiten gleich bleiben. Allerdings gelten die  
gestellten Betrachtungen nur, wenn eine zweidimen-  
le Synthese „ab ovo“ durchgeführt wird, nicht  
ch, wenn eine Variante einer Synthese, z.B. unter  
asel des Vorzeichens eines FOURIERgliedes, be-  
nnet werden soll. Im letzteren Falle besäße ein  
dimensionales Gerät gewisse zusätzliche Vorteile.

Vergleich der numerischen Rechenmethode mit der  
Maschinenrechnung.

Es ergibt sich nun die Frage, worin die Vorteile des  
mens auf dem Überlagerer gegenüber dem nume-  
ren Rechnen mit Tabellen usw. eigentlich bestehen.  
bei ist es wohl selbstverständlich, daß auch für die  
erische Rechnung eine Zerlegung in eindimensio-  
Teilreihen vorausgesetzt wird, da die unmittel-  
Summierung von mehreren hundert Gliedern pro  
zpunkt des zweidimensionalen Rasters sicherlich  
ungeschickt wäre. Die Aufsummierung der ein-  
dimensionalen Teilreihen zerfällt in eine Produkt-  
ung zur Gewinnung der Glieder  $a_h \cos 2\pi h x$  und  
die eigentliche Summation. Betrachten wir des  
gleiches wegen eine 14gliedrige Cosinusreihe, so  
bei 24 Stützstellen 336 Produktbildungen nötig  
bei man die Cosinuswerte einer vorbereiteten Ta-  
e entnehmen wird), sowie pro Synthesepunkt  
Additionen (z. B. in einer üblichen Additions-  
chine). Diesen insgesamt 672 Elementaropera-  
en der numerischen Rechnung stehen nur 14 Ele-  
taroperationen der Maschinenrechnung gegen-  
r. Dabei ist noch zu bedenken, daß nicht nur der  
gewinn zählt, sondern daß der gleichlaufenden  
ringerung der Möglichkeit der Rechenirrtümer bei  
Elementaroperationen fast die gleiche Bedeutung  
uordnen ist.

In der Kristallstrukturanalyse ist die sogenannte  
reifenmethode“ nach BEEVERS und LIPSON [11]  
die Synthese von zweidimensionalen Synthesen  
gebräuchlich. Sie geht im Wesentlichen darauf  
aus, die Werte  $A_h \cos 2\pi h x$  für diskrete Werte von  
(meist für  $A_h$  von 1—100 in Abständen von 1) auf  
ordneten Streifen zu tabellieren, wobei ein Streifen  
tliche Teilsummanden der Stützpunkte  $x$  für ein  
timmes  $A_h$  enthält. Bei der Durchführung einer  
these werden für die gewünschte Teilreihe z. B.

<sup>1</sup> Diese Zeiten wären zu vervierfachen, wenn die Raster-  
Be verkleinert (Zwischenwerte) und das Kompensations-  
fahren angewandt wird. Am Modell I benötigte ein Chemie-  
ent im Praktikum folgende Zeiten für eine zweidimen-  
ale Synthese:

Berechnung an der Maschine. . . . .	12h 45'
Bestimmung von Mittelwerten nach dem Kompen- sationsverfahren . . . . .	2h 30'
Zeichnung der Kurven . . . . .	2h 05'
Zeichnung der Konturenkarte . . . . .	1h 30'
	18h 30'

Modell II sollte also die Möglichkeit der Berechnung halber  
ultatintervalle (Verringerung des Rasters ohne zusätzliche  
benzeit) und die höhere Genauigkeit (Vermeidung des Kom-  
sationsverfahrens außer für besonders genaue Synthesen)  
einem wesentlichen zeitlichen Gewinn führen, wobei die  
estrebte Verkleinerung der Maschinenoperationszeit noch  
at berücksichtigt ist.

14 Cosinusstreifen der zugehörigen  $A_h$  herausgesucht,  
übereinandergelegt und die übereinander stehenden  
Zählwerte unter Berücksichtigung ihrer Vorzeichen  
mit einer Additionsmaschine summiert. Der Ersatz  
der Produktbildung durch eine geschickte Tabellie-  
rung ist der wesentliche und wichtige Hauptvorzug  
dieses Verfahrens; in der Zeitbilanz und der Wahr-  
scheinlichkeitsbilanz der Fehler (336 Elementarope-  
rationen gegenüber 14 Elementaroperationen) er-  
scheint allerdings auch hier das Maschinenverfahren  
noch wesentlich vorteilhafter.

Ein Vergleich der Rechenbilanzen bei den ver-  
schiedenen „Automatisierungsstufen“ numerische Be-  
rechnung mit Produktbildung, Streifenmethode, ein-  
dimensionaler Überlagerer, zweidimensionaler Über-  
lagerer, zeigt also, daß der entscheidende Sprung beim  
Übergang zum eindimensionalen Rechenggerät liegt,  
während — wie früher gezeigt — die Vorteile des zwei-  
dimensionalen Gerätes nicht besonders ins Gewicht  
fallen, zumindest wenn man nicht gleichzeitig auch die  
Konstruktion der Schichtlinienkarten automatisiert  
wie dies in dem elektronischen Überlagerer [7] vorge-  
nommen wird, dessen Rechen- und Ablesezeit (Photo-  
graphische Aufnahme des Schichtlinienbildes) Bruch-  
teile von Sekunden beträgt, so daß die meiste Zeit für  
die Einstellung der FOURIERkoeffizienten an den etwa  
500 Rechenpotentiometern erforderlich ist. Dieses Ge-  
rät eignet sich insbesondere für die Strukturverfahren  
nach [1], [2]. Allerdings ist der nötige Aufwand wie bei  
allen zweidimensionalen Synthetisatoren sehr be-  
trächtlich, auch dürfte die erreichbare Synthesege-  
nauigkeit beschränkt sein [14]. Es sei hier noch eine  
Bemerkung zur Durchführung der numerischen Rech-  
nung mit digitalen Rechenautomaten hinzugefügt. Es  
ist klar, daß einer der genannten numerischen Rechen-  
pläne durch Lochkarten oder durch Programmsteue-  
rung und Ausnützen der Speicherkapazität in einem  
modernen Vielzweckrechenggerät vollkommen auto-  
matisiert werden kann. Die Zahl der Elementarope-  
rationen bleibt hierbei zwar die gleiche, doch bedingt  
die Automatisierung eine Verbesserung der Zeitbilanz  
und die Vermeidung von Eingabe- und Ablesefehlern.  
Ein gewisser Nachteil ist die Starrheit des Systems  
und der wenig übersichtliche Ablauf der Rechnung mit  
geringer Anpaßmöglichkeit an spezielle Probleme. Es  
ist auch zu beachten, daß die meist nötigen Zwischen-  
tabellierungen eine beträchtliche Speicherkapazität  
verlangen, so daß recht leistungsfähige Automaten  
nötig sind. (Vgl. die Zeitangabe für die Maschine  
EDVAC [5].) Ein genauer Zeitvergleich zwischen bei-  
den Methoden ist schwer möglich, da er zu sehr von  
der Art des verwendeten Rechenautomaten und der  
speziellen Rechenmethode abhängt. Einen gewissen  
Hinweis auf die Größenordnung des erreichbaren  
Optimums gibt die erwähnte Zeitangabe, die eine der  
schnellsten elektronischen Maschinen betrifft<sup>1</sup>.

12. Zweidimensionale FOURIERsynthese von Hexa-  
methylenetetramin.

Als Rechenbeispiel einer zweidimensionalen FOU-  
RIERSynthese wurde die Projektion der Elektronen-  
dichte in der Elementarzelle von Urotropin nach [001]  
berechnet. Dieses Beispiel ist günstig, da eine sehr

<sup>1</sup> Nach [14] ist zur Berechnung einer zweidimensionalen  
Synthese in Lochkartenmaschinen eine Zeit von einem halben  
bis zwei Tagen erforderlich.



genau gerechnete FOURIERSynthese von R. BRILL, H. G. GRIMM und CL. PETERS vorliegt [11].

Abb. 4 zeigt einen Vergleich der aus beiden Synthesen konstruierten Schichtlinienkarten. Die Schichtlinienkarte ist in Abb. 4 in zwei Dreiecke zerteilt. Das Dreieck rechts unten enthält einen Ausschnitt der Schichtlinienkarte nach der Arbeit [11], die linke obere Hälfte einen Ausschnitt aus der von uns ermittelten Schichtlinienkarte. Das Ergebnis beider Rechnungen ist weitgehend identisch, nur im Untergrund sind geringe Abweichungen festzustellen. Damit ist erwiesen, daß das verwendete Rechengerät in seiner Genauigkeit für normale Strukturanalysen vollständig



Abb. 4 Elektronendichteverteilung in Hexamethylentetramin projiziert auf die 001-Ebene. Die Höhenlinien verbinden Orte gleicher Elektronendichte. Das linke obere Dreieck der Abbildung zeigt die mit dem neuen Geräterhaltene Schichtlinienkarte, während das rechte untere Dreieck zum Vergleich nach den Angaben bei [11] gezeichnet wurde.

ausreicht. Für feinste Elektronendichtebestimmungen — die natürlich nur bei entsprechend genauen Röntgenintensitätsmessungen einen Sinn haben — reicht allerdings die Genauigkeit des Gerätes noch nicht ganz aus. Die geschätzte Genauigkeit beträgt etwa 1%<sup>1</sup>.

### 13. Vorgang bei der Berechnung einer dreidimensionalen Synthese.

In analoger Weise kann die Berechnung von dreidimensionalen Reihen durchgeführt werden. Wir wollen die nötige Zerlegung nur kurz andeuten. Man betrachte als Beispiel den ersten Summanden in (21)

$$f_1(x, y, z) = \sum_{h=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} A_{hkl} \cos 2\pi h x \times \cos 2\pi k y \cos 2\pi l z$$

den man offenbar auch schreiben kann

$$f_1(x, y, z) = \sum_{h=0}^{+\infty} U_{h,y,z} \cos 2\pi h x \quad (34)$$

mit

$$U_{h,y,z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} A_{hkl} \cos 2\pi k y \cos 2\pi l z$$

wobei wir analog zu (29) wieder schreiben können

$$U_{h,y,z} = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{h,k,z} \cos 2\pi k y$$

mit

$$c_{h,k,z} = \sum_{l=0}^{+\infty} A_{hkl} \cos 2\pi l z.$$

Damit ist die Zerlegung der Reihen (21) in eindimensionale Teilreihen an einem Summanden im Prinzip gezeigt. Häufig wird es nicht nötig sein, die vollständige dreidimensionale Synthese durchzuführen, es genügt bisweilen Stützpunkte einer Schnittkurve oder einer Schnittgeraden anzugeben, wodurch die Rechenarbeit sehr beträchtlich verringert. Schließlich treten weiter z. T. bedeutende Vereinfachungen auf, wenn durch Symmetriebedingungen in der Verteilung Vorzeichenzusammenhänge der FOURIERkoeffizienten bestehen.

### 14. Eindimensionale FOURIERanalyse.

Jedes Gerät, das zur Synthese von FOURIERreihen verwendbar ist, kann auch zur Analyse von periodischen Funktionen dienen. Das entwickelte Gerät ist sogar recht gut dazu geeignet, da sich seine allgemeinen Vorteile wie hohe Rechengeschwindigkeit, bequeme Bedienung usw. auch hier bemerkbar machen. Das Rechenverfahren unterscheidet sich insofern von den üblichen Analysemethoden nach dem Planimeterprinzip, als nicht die Kurve selbst, sondern ein System gleichabständiger Ordinaten in das Gerät eingegeben werden. Deren Anzahl richtet sich nach der Zahl der gewünschten FOURIERkoeffizienten, die wiederum begrenzt wird durch die Zahl der vorhandenen Schichten. Bei der Ablesung der Ordinaten benutzt man mit Vorteil Maßstäbe und Ordinatenscharen aus dünnem Material. Eine Umzeichnung der Kurve ist nicht erforderlich.

Nach dem RUNGESchen Verfahren ersetzt man die Integrale der FOURIERkoeffizientendarstellung

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ C_h &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos h x dx \\ S_h &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin h x dx \end{aligned} \right\}$$

für die Berechnung von FOURIERkoeffizienten bis zur Ordnung  $n$  in genügender Näherung durch die Summen

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{n} \sum_{v=0}^n f(v) \\ C_h &= \frac{2}{n} \sum_{v=1}^n f(v) \cos v \left( \frac{2\pi}{n} k \right) \\ S_h &= \frac{2}{n} \sum_{v=1}^n f(v) \sin v \left( \frac{2\pi}{n} k \right) \end{aligned} \right\}$$

<sup>1</sup> In einer Arbeit von W. COCHRAN [13] werden die Genauigkeitsanforderungen für die Berechnung von Elektronendichtediagrammen diskutiert.



Unterteilung des Funktionsintervalles in  $n$  unabhängige Ordinaten der Laufzahl  $v$  und der  $f(v)$ .  
In unserem Rechenmaschinenmodell ist  $n$  höchstens gleich 14 (14 Sinusschablonen) also z. B.

$$c_h = \frac{2}{14} \sum_{v=1}^{14} f(v) \cos v \left( \frac{2\pi}{14} h \right). \tag{40}$$

Man teilt man die Überlagerung dieser Reihe durch, so erhält man 7 FOURIERKoeffizienten  $c_h$  wobei man bei erhaltenen und gezeichneten Kurve das Resultatintervall in 14 Teile unterteilt und die ersten sieben Ordinaten abliest. Man kann nun diese Arbeit sparen, man braucht nur 12 Glieder eingibt; denn da die Maschine an 24 Stützpunkten Nadeln enthält, entspricht Wert jeder zweiten Nadel einem FOURIERKoeffizienten<sup>1</sup> und man erhält so unmittelbar die FOURIERkoeffizienten bis zur 6-ten Ordnung.

15. Rechenbeispiele für eine FOURIERanalyse.

Es wurde ein Beispiel aus [13], S. 49 gewählt. Die in Abb. 5 dargestellte zu analysierende Kurve wird in 12 Ordinaten gleichgeteilt, deren Werte Tabelle 4 enthält.

Tabelle 4.

$v$	$f(v)$	$v$	$f(v)$
1	21	7	-23
2	37	8	-21
3	43	9	-13
4	29	10	2
5	-13	11	7
6	-22	12	10

Die Tabelle 5 enthält nun die berechneten Werte von  $C_h$  bzw.  $S_1-S_5$  in Vergleich mit den numerisch berechneten Werten.

Tabelle 5.

Maschine	Rechnung		Maschine	Rechnung
17,1	17,15	$S_1$	23,5	23,6
-11,6	-11,6	$S_2$	- 1,73	- 1,73
0,16	0,167	$S_3$	- 5,25	- 5,3
- 0,24	- 0,25	$S_4$	2,8	2,88
- 1,35	- 1,32	$S_5$	- 0,86	- 0,93
0,92	1,08			

16. Zweidimensionale FOURIERanalyse.

Es sei kurz erwähnt, daß nach einem analogen Verfahren sich auch zweidimensionale FOURIERanalysen in FOURIERSynthesen umwandeln lassen, welche nach dem angegebenen Schema mit dem Gerät berechnet werden können. Eine gewisse Bedeutung besitzt dieses Verfahren ebenfalls in der Strukturanalyse von Kristallen, da es die rationelle Berechnung von Strukturmodellen ermöglicht, insbesondere von komplizierte und hochparametrische Strukturen liegen.

17. Die weitere Entwicklung des Rechengertes.

Die Erfahrungen mit dem beschriebenen Gerät sind bei der Konstruktion eines weiteren Modells verwertet worden, das von dem Konstrukteur des beschriebenen

Gerätes Dr.-Ing. K. PANNKE und dem einen von uns (HOPPE) entwickelt wird. Während das erste Gerät mehr als Vorstudie zu einem zweidimensionalen Gerät gedacht war, wird jetzt aus den mehrfach genannten Gründen von dem Bau eines zweidimensionalen Überlagerers überhaupt abgesehen, während andererseits versucht wurde, das außerordentlich einfache neue mechanische Prinzip auf hohe Genauigkeit zu züchten, und der zweidimensionalen Synthese noch mehr anzupassen. Es wird ein Gerät angestrebt, das auch für genaue Elektronendichteuntersuchungen anwendbar ist. Gleichzeitig soll der Zeitfaktor möglichst herabgedrückt und die Bedienung weiter vereinfacht und mechanisiert werden. Es liegt nicht im Rahmen vorliegender Arbeit auf Details des neuen Gerätes einzugehen, es seien aber die wichtigsten Verbesserungen hervorgehoben.

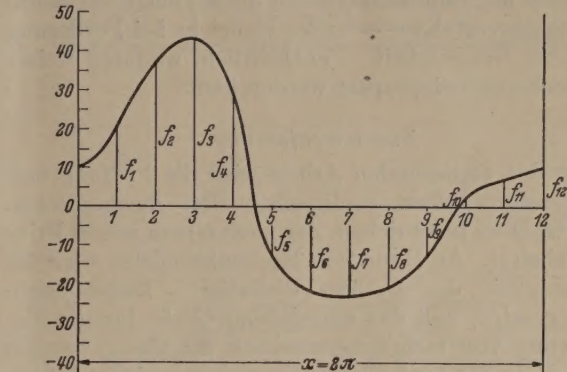


Abb. 5. Beispiel aus [12] für eine FOURIERanalyse nach dem Verfahren von RUNGE. Die dargestellte Kurve soll analysiert werden. Die Ergebnisse der Analyse sind in Tab. 8 enthalten.

a) Genauigkeit. Der Einstellteil gestattet die Eingabe sämtlicher FOURIERwellen mit einer Genauigkeit von ca  $\pm 10^{-6}$ . Eine Auswechslung von Schablonen ist nicht mehr erforderlich, die Anzahl der eingebbaren FOURIERglieder ist nicht beschränkt. Die Grundamplitude sämtlicher FOURIERglieder ist konstant (25 mm), was die Eingabe wesentlich erleichtert. Im Abtastteil konnte das Resultatintervall von 170 mm auf 600 mm erweitert werden, wobei Überschreitungen von 500 mm der Endwerte nach beiden Seiten zugelassen sind und nur eine etwas kompliziertere Ablesung erfordern. Die anschauliche Kurvenform des Resultates wird beibehalten. Die Abtastung erfolgt stetig (ohne Abrundung durch Rillen), also mit der vollen Genauigkeit der Eingabe. Es ist vorgesehen die Zahl der Stützpunkte zu vergrößern.

b) Schnelligkeit. Bei der großen Anzahl von Elementaroperationen ( $\sim 1000$ ) pro zweidimensionale Synthese ist ihrer schnellen Durchführbarkeit großes Gewicht zuzumessen. Es ist wahrscheinlich, daß mit der neuen Abtastung die Tourenzahl der Maschine erhöht werden kann. Die Eingabe ist vereinfacht durch die Konstanz aller Grundamplituden, wobei die bisher erforderliche Umrechnung von  $A_h$  in  $\bar{\partial}_{(h)}$  durch den Gebrauch entsprechender nichtlinearer Skalen vermieden wird. Wichtig für die Schnelligkeit und die Mechanisierung des Rechengvorganges ist auch die bedeutende Vergrößerung des Resultatintervalles. Ein Analogiegerät hat immer den Charakter eines Meßgerätes d. h. man muß die einzugebenden Werte seinem Arbeitsbereich anpassen und sie evtl. entsprechend umformen. Im bisherigen Modell war nun immer eine



ungewollte Überschreitung des Resultatintervalles gefährlich, während im neuen Modell nicht nur das Intervall vervielfacht wurde, sondern sogar wesentliche Überschreitungen kaum stören. Damit ist gleichzeitig auch eine Erhöhung der Gerätegenauigkeit verbunden. Die Synthese kann schließlich noch so geführt werden, daß die Stützpunkte nur ein halbes Intervall erfüllen, daß also ohne Erhöhung der Rechenzeit ein dichteres Raster erhalten wird. Dies ist vorteilhaft, weil in vielen Fällen die Berechnung eines halben Resultatintervalles ausreicht (z. B. bei symmetrischen oder schiefssymmetrischen Funktionen). Sollte man die zweite Hälfte auch benötigen, so kann diese in einem zweiten Arbeitsgang berechnet werden. Im Übrigen ist aber auch eine unmittelbare Berechnung des ganzen Intervalles in einem Synthesegang wie bei Modell I möglich. Die hohe Eingabegenauigkeit der Maschine (Wegfall der Sinusschablonen) macht auch das Kompensationsverfahren — außer vielleicht bei Forderung höchster Genauigkeit — entbehrlich, wodurch weiter an Rechenzeit eingespart werden kann.

#### Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wird die Prüfung und Verwendung eines eindimensionalen mechanischen Überlagerers beschrieben, der nach einem neuen Prinzip arbeitet. An Hand von Rechenbeispielen wird die Genauigkeit des Gerätes diskutiert. Insbesondere wird gezeigt, daß das angegebene Gerät für die Berechnung von mehrdimensionalen Synthesen — wie sie z. B. in der Kristallstrukturanalyse anfallen — besonders geeignet ist. Ein Vergleich mit einem hypo-

thetischen zweidimensionalen Überlagerer nach gleichen Prinzip lehrt, daß der Übergang zu mehrdimensionalen Geräten keine wesentlichen Reevorteile bringt, während andererseits der Aufwand außerordentlich vergrößert, die Gerätegenauigkeit aber verschlechtert wird.

Der Bau des in vorstehender Arbeit benutzten Gerätes Nr. I wurde aus Mitteln ermöglicht, die H. Prof. Dr. G. SCHEIBE für das physikal. chem. Institut der Technischen Hochschule München von der Forschungsgemeinschaft der deutschen Wissenschaft zur Verfügung gestellt wurden. Wir möchten auch an dieser Stelle unseren Dank für die großzügige Förderung zum Ausdruck bringen.

**Literatur.** [1] HOPPE, W.: Naturw. 35, 254 (1948). — [2] BOOTH, A. D.: J. appl. Phys. 20, 388 (1949). — [3] HART, D. u. KASPER, J. S.: Acta. cryst. 1, 70 (1948). — [4] KARRER, u. HAUPTMANN, H.: Acta. cryst. 3, 181 (1950). — [5] BUEHLER, M. J.: Acta. cryst. 4, 53, (1951). — [6] BENNETT, J. I. u. KENDREW, J. C.: Acta. cryst. 5, 109 (1952). — [7] PEPINSKY, Nature 162, 22, (1948). — [8] HOPPE, W.: Z. El. Chem. 54, 1 (1950). — [9] LIPSON, H. u. BEEVERS, C. A.: Proc. Phys. London 48, 772 (1936). — [10] BEAUCLAIR, W. de: Dissert. Techn. Hochsch. Darmstadt 1944. — [11] BRILL, R., GEHLEN, H. G., HERMANN, C. u. PETERS, Cl.: Ann. Phys. 34, 393 (1951). — [12] WAGNER, K. W.: Einführung in die Lehre von den Schwingungen und Wellen S. 49. Dietrich'sche Verlagsbuchhandlung Wiesbaden (1947). — [13] COCHRAN, W.: Acta. cryst. 1, 1 (1948). — [14] NOWACKI, W.: Fouriersynthese von Kristallen. Verlag Birkhäuser, Basel (1952).

Dipl.-Phys. VIKTOR CAIMANN,  
Physikalisch-chemisches Institut d. T. H. München

Dr. rer. nat. habil. WALTER HOPPE,  
Yveidon Av. de Bains, Hôtel de la Prairie.

## Über eine Anordnung zur Abkürzung der Versuchszeiten bei der Bestimmung von Wärmeleitzahlen im POENSGENSCHEN Plattenapparat\*.

VON WALDEMAR OSWALD, München.

(Mitteilung aus dem Laboratorium für Technische Physik der Technischen Hochschule München.)

Mit 3 Textabbildungen.

(Eingegangen am 11. November 1952.)

#### Einleitung.

Die Prüfung von Baustoffen auf ihre Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  geschieht im allgemeinen im POENSGENSCHEN Plattenapparat [1, 2, 3]. Eine horizontal liegende Heizplatte der Fläche  $F$  ist dabei an beiden Seiten mit einer Platte der Dicke  $d$  des zu prüfenden Materials belegt. An diese schließt sich je eine auf konstanter Temperatur gehaltene Kühlplatte an. Der Heizplatte wird elektrisch eine genau meßbare konstante Wärmemenge  $Q_h$  zugeführt, die im stationären Zustand dem sich zwischen Heizplatte und Kühlplatten einstellenden Temperaturgefälle  $t_1 - t_2$  folgend, durch die Prüfplatten zu den Kühlplatten strömt. Ein die Heizplatte umgebender Schutzring, der auf die Temperatur der Heizplatte aufgeheizt wird, verhindert eine seitliche Wärmeabgabe. Die Kühlplatten überdecken auch diesen Schutzring. Durch Einbettung der ganzen Anordnung in Korkschrot werden die Kühlplatten vor Wärmezufuhr und Feuchtigkeitniederschlag weit-

gehend geschützt. Die im stationären Zustand strömende Wärmemenge  $Q_h$  ist dann

$$Q_h = 2 \frac{\lambda \cdot F}{d} (t_1 - t_2).$$

Sie muß unter Berücksichtigung des elektrischen Wärmeäquivalents der in derselben Zeit zugeführten elektrischen Gleichstromenergie  $I \cdot U$  gleich sein. Man kennt letztere, sowie die Temperaturdifferenz zwischen Heizplatte und Kühlplatten, und kennt man die Wärmemenge  $Q_h$ , so kann man die Wärmeleitzahl  $\lambda$  aus

$$\lambda = \frac{0,86 \cdot U \cdot I \cdot d}{2 \cdot F \cdot (t_1 - t_2)} \text{ kcal/mh Grad}$$

berechnen, wobei  $U$  in Volt,  $I$  in Ampère,  $d$  in mm,  $F$  in  $\text{cm}^2$  und  $t$  in  $^\circ\text{C}$  einzusetzen ist.

Um die Heizleistung im stationären Zustand mit genügender Genauigkeit ermitteln zu können, erfordert das Verfahren eine konstante Spannungsquelle.

Die Bestimmung der Wärmeleitzahl bei einer Temperatur dauert ungefähr 24–36 Stunden, bei

\* Die Arbeit entstand auf Anregung von Prof. W. MEISSNER. An der Durchführung waren die Herren C. SCHEIDT und W. ILLIG beteiligt.



temperaturen 5–6 Tage. Die Wärmespeicherung in Prüfplatten nimmt längere Zeit in Anspruch (Aufzeit). Die Angleichung der Schutzringtemperatur die Heizplattentemperatur gelingt im allgemeinen nach mehrmaligem Nachregulieren. Man kann die Prüfzeiten wesentlich verkürzen, indem man der Heizplatte während des Aufheizvorganges bedeutend mehr Energie zuführt, als es im stationären Zustand erforderlich ist, und durch öfteres Nachregulieren der Schutzheizung die Schutzringtemperatur möglichst schnell der Heizplattentemperatur angleicht. Das verlangt jedoch eine laufende Überwachung des Versuches. Es ist naheliegend, diese Regelungen automatisch durchführen zu lassen. Hierfür wurde nachfolgend beschriebene Anordnung entwickelt.

#### Grundsätzliche Arbeitsweise der neuen Anordnung.

Der Heizplatte wird ungefähr dreimal so viel Energie zugeführt, wie es die Ausbildung einer Temperaturdifferenz von beispielsweise  $10^{\circ}\text{C}$  im stationären Zustand erfordern würde. Ist die gewünschte Temperaturdifferenz erreicht, so wird sie automatisch konstant gehalten. Die dazu notwendige Herabsetzung der Anzennergie wird durch periodische mit einem Lichtstrahl hervorgerufene Stromunterbrechungen herbeigeführt. Der Aufheizvorgang verkürzt sich dabei auf etwa ein Viertel der sonst erforderlichen Zeit. Der stationäre Zustand ist erreicht, wenn die in einer bestimmten Zeit zugeführte Energie immer gleich bleibt. Der Schutzring wird ebenfalls mit Hilfe eines Lichtstrahls automatisch auf der Temperatur der Heizplatte gehalten.

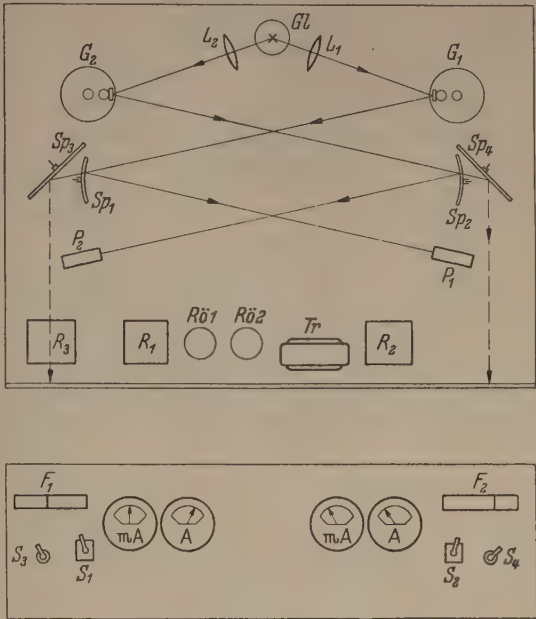
#### Arbeitsweise im einzelnen und Aufbau der Anordnung.

Abb. 1 zeigt den Aufbau, Abb. 2 das elektrische Schaltbild. Die Bezeichnungen gleicher Teile sind in beiden Abbildungen gleich gewählt.

a) Die Regelung der Temperaturdifferenz zwischen Heizplatte und Prüfplatten.

Der Faden einer Glühlampe  $Gl$  (Abb. 1) wird durch eine Linse  $L_1$  auf dem Spiegel eines spannungsempfindlichen Galvanometers  $G_1$  abgebildet und von da über einen elliptischen Zylinderspiegel  $Sp_1$  auf die Photozelle  $P_1$  geworfen. Galvanometerspiegel und Photozelle stehen in den Brennpunkten einer Ellipse, die dem senkrechten Schnitt durch den Zylinderspiegel entspricht. Bei Nullstellung des Galvanometers geht der Lichtzeiger gerade an der Kante des Spiegels vorbei. Regelgröße ist die zwischen Heizplatte und Prüfplatten herrschende Temperaturdifferenz. Zu ihrer Messung dient ein Mehrfach-Differentialthermoelement  $Th_1$  (Abb. 2), dessen Lötstellen auf den beiden Oberflächen der Prüfplatten verteilt sind. Die Empfindlichkeit des Galvanometers ist so gewählt, daß die Regelung bei einer Abweichung der Regelgröße vom Sollwert um  $0,02^{\circ}$  in Tätigkeit tritt. Dabei ruft die Temperaturdifferenz entsprechende Thermospannung im stationären Zustand bei direkter Messung bereits zu große Galvanometerausschläge hervor. Die Messung der Regelgröße erfolgt daher in einer INDECK-ROTHE-Kompensationsschaltung [4].

Die dem Sollwert entsprechende Spannung wird durch einen Akkumulator  $A$  (Abb. 2) an einem Widerstand  $W_1$  erzeugt. Der Widerstand liegt außerdem in Reihe mit dem Galvanometer  $G_1$  und dem Thermoelement  $Th_1$ . (Die Verbindung über  $W_2$ ,  $R_3$  denke





Photozelle dauernd beleuchtet. Der durch die Beleuchtung der Photozelle hervorgerufene Strom bewirkt über eine Verstärkerröhre  $R\ddot{o}_1$  und ein Relais  $R_1$  die Einschaltung der Heizung. Die Temperaturdifferenz wird nun wieder größer, und bei Erreichen des Sollwertes wird die Heizung abgeschaltet. Das Galvanometer  $G_1$  führt also im stationären Zustand kleine Schwingungen um die Nullage aus.

Der größere Ausschlag, der nunmehr beim Anheizen in entgegengesetzter Richtung auftritt, kann leicht reduziert werden, da es hier nicht auf große Empfindlichkeit ankommt. Durch eine mechanische Vorrichtung können zwei auf dem Relais  $R_3$  angebrachte Quecksilberschaltrohren in Kontaktstellung gebracht werden. Durch den einen Kontakt wird dem Galvanometer ein Widerstand  $W_2$  parallel geschaltet, der den Ausschlag in erträglichen Grenzen hält. Er ist aber trotzdem noch so groß, daß der Lichtzeiger nicht mehr auf den Spiegel fällt und damit die Heizung abgeschaltet ist. Deshalb wird durch den zweiten Kontakt gleichzeitig  $R_1$  kurzgeschlossen und dadurch die Heizung wieder eingeschaltet. Fällt der Lichtzeiger beim Erreichen des Sollwerts auf den Spiegel und da-

Die Messung der Heiz- und Kühlplattentemperatur folgt wie bisher mit Thermoelementen.

Die Ermittlung der stündlich zugeführten Heizplattenenergie kann wegen der unterbrochenen Zufuhr der Energie nicht mehr durch Strom- und Spannungsmessung erfolgen. Es wird dafür ein Wattstundenzähler  $Z$  (Abb. 2) mit einer Nennleistung von 150 W (50 V, 3 A) und einer Ablesegenauigkeit von  $1/10$  V verwendet. Der Zähler wurde vor dem Gebrauch um Berücksichtigung aller Fehlermöglichkeiten geeicht. Bei der Durchführung eines Versuchs wird der Zählerstand mehrmals in Abständen von etwa einer Stunde abgelesen. Die Heizleistung ergibt sich aus der Differenz der Zählerstände dividiert durch die zugehörige Zeit. Ist die Heizleistung bei zwei aufeinanderfolgenden Ablesungen gleich, dann ist der stationäre Zustand erreicht.

#### d) Weitere Einzelheiten des Aufbaus

Auf der Frontplatte des Gerätes (Abb. 1) sind Milliampere- (mA) und Amperemeter (A) angebracht, die es jederzeit erlauben, die in den Spulen der Relais  $R_1$  und  $R_2$  und die in der Heizplatte bzw. dem Schutzring fließenden Ströme zu beobachten.

Hinter den Hohlspiegeln  $Sp_1$  und  $Sp_2$  sind etwa erhöht noch zwei Planspiegel  $Sp_3$  und  $Sp_4$  angebracht, die einen Teil des jeweils zugehörigen Lichtzeigers auf zwei in die Frontplatte geschnittene Mattscheibenfenster  $F_1$  und  $F_2$  werfen. Dadurch ist eine dauernde Beobachtung der Galvanometerausschläge möglich.

Mit den Schaltern  $S_1$  und  $S_2$  kann unabhängig voneinander die Heizung der Platte bzw. des Schutzringes eingeschaltet werden.

Die Schalter  $S_3$  und  $S_4$  dienen zum Kurzschließen der Galvanometerklemmen.

Ein Spartransformator  $Tr$  liefert die Spannung für die Glühlampe und die Spannung für die Heizung der Röhren. Die Anodenspannungen für die Röhren sowie die Hilfsspannungen für die Photozellen werden aus dem Gleichstromnetz entnommen.

#### Ergebnisse.

Mit dieser neuen Anordnung wurden Wärmeleitzahlen verschiedener Baustoffe bestimmt und mit den nach dem bisherigen Verfahren ermittelten verglichen. Als Beispiel ist in Abb. 3 die Wärmeleitzahl einer Leichtbauplatte aus Holzwolle in Abhängigkeit von der Temperatur aufgetragen. Die Kreuze entsprechen Meßpunkten nach dem alten und sicherlich genaueren Verfahren, die Kreise Meßpunkten nach dem neuen Verfahren. Die Werte stimmen innerhalb der Fehlergrenzen von  $\pm 2\%$  sehr gut überein. Die Prüfzeiten betragen nur noch höchstens ein Viertel der bisher erforderlichen Zeit. Das beschriebene Verfahren bringt nebenbei noch den Vorteil, daß man keine konstante Spannungsquelle mehr benötigt, die Heizung also ohne besondere Stabilisierungsmaßnahmen aus dem Netz erfolgen kann.

#### Zusammenfassung.

Es wird über ein Verfahren berichtet, das es ermöglicht, die Bestimmung der Wärmeleitzahl von Baustoffen im POENSGENSCHEN Plattenapparat wesentlich zu beschleunigen. Zur Verkürzung der Prüfzeiten wird während der Anheizperiode ungefähr das dreifache der im stationären Zustand erforderlichen Energie zur Erreichung einer Temperaturdifferenz von beispielsweise

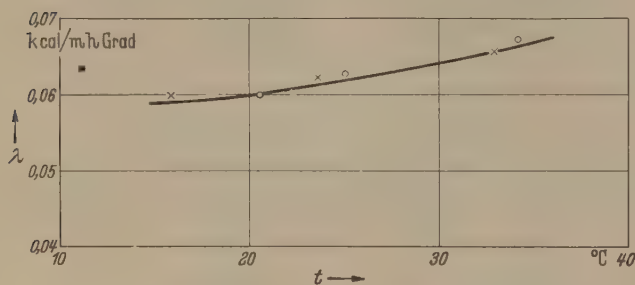


Abb. 3. Wärmeleitzahl einer Leichtbauplatte aus Holzwolle in Abhängigkeit von der Temperatur.

× Meßpunkte nach dem bisherigen Verfahren.  
○ Meßpunkte nach dem neuen Verfahren.

mit auf die Photozelle, so werden die vorher mechanisch hergestellten Kontakte in den Quecksilberschaltrohren auf elektrischem Wege wieder gelöst. Die Spule des Relais  $R_3$  liegt nämlich in Reihe mit der des Relais  $R_1$  im Anodenkreis der Röhre  $R\ddot{o}_1$ .

#### b) Die Regelung der Temperaturdifferenz zwischen Heizplatte und Schutzring.

Ebenso wie bei der Heizplatte erfolgt die Regelung der Temperatur des Schutzringes mit Hilfe eines Lichtrelais ( $L_2$ ,  $G_2$ ,  $Sp_2$ ,  $P_2$ ) (Abb. 1). Die einen Lötstellen des an das Galvanometer  $G_2$  angeschlossenen Mehrfach-Differential-Thermoelementes  $Th_2$  (Abb. 2) befinden sich am Schutzring, die anderen auf der Heizplatte. Regelgröße ist die Temperaturdifferenz zwischen Heizplatte und Schutzring. Da ihr Sollwert ohnehin  $0^\circ$  ist, entfällt hier die Anwendung einer Kompensationsschaltung.

#### c) Temperaturmessung und Ermittlung der Heizleistung.

Auf Grund der periodisch unterbrochenen Zufuhr der Heizenergie bei Heizplatte und Schutzring sind deren Temperaturen Schwankungen unterworfen. Ihre Amplituden hängen von der Wärmekapazität der Heizplatte und des Schutzringes und von der Wärmeleitzahl der Prüfplatten ab. Sie lassen sich jedoch durch geeignete Maßnahmen vernachlässigbar klein halten.



zwischen Heizplatte und Kühlplatten zugeführt. da ab wird durch periodische mit einem Licht- is hervorgerufene Stromunterbrechungen die Heiz- gie so herabgesetzt, daß die Temperaturdifferenz stant bleibt. Die Messung der mittleren Heizlei- ng erfolgt mit einem geeichten Wattstundenzähler. Messung der Heizplatten- und der Kühlplatten- temperatur dienen Thermoelemente. Die Schutzring- temperatur wird ebenfalls mit Hilfe eines Lichtrelais ernd der Heizplattentemperatur angeglichen. Die h der alten und der neuen Methode gefundenen rmeleitzahlen stimmen innerhalb der Fehlergrenzen

überein. Die Versuchsdauer nach dem neuen Verfahren beträgt nur noch höchstens ein Viertel von derjenigen nach dem alten Verfahren.

**Literatur.** [1] POENSGEN, R.: Z. VDI **56**, 1653 (1912). — [2] KNOBLAUCH, O. E. RAISCH u. H. REIHER: Ges. Ing. **43**, 607 (1920). — [3] MEISSNER, W. u. R. IMMLER: Wärme- und Kältetechnik, 129 (1938). — [4] LINDECK, St. u. R. ROTHE: Z. f. Instrumentenkunde **19**, 242 (1899) u. **20**, 293 (1900).

Dipl.-Phys. WALDEMAR OSWALD,  
Labor. f. Techn. Physik der T. H. München,  
München 2, W. v. Dyck-Platz 1.

## Winkelabhängigkeit der Lichtstreuung einzelner Nebeltröpfchen. (Gemessen an Mesonenbahnen der kosmischen Strahlung in der WILSON-Kammer.)

VON MARTIN S. ELSAESSER und KARL WIRTZ, Göttingen.

(Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen.)

Mit 6 Textabbildungen.

(Eingegangen am 25. November 1952.)

*Frühere Arbeiten über die Lichtstreuung an kleinen Tröpfchen und Formulierung des eigenen Problems.*

Die Abhängigkeit der Helligkeit kleiner Tröpfchen, mit parallelem Licht einseitig beleuchtet werden, am Beobachtungswinkel ist mehrfach theoretisch und experimentell untersucht worden. WIENER [1] hat die Winkelverteilung der Lichtintensität  $J(\theta)$  an großen Wassertropfen (Tröpfchenradius  $\rho$  » Lichtwellenlänge  $\lambda$ ) mit Hilfe der geometrischen Optik und der FRESNELSchen Formeln für alle Winkel  $\theta$  zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  berechnet. Er findet den Verlauf von  $J(\theta)$  abhängig vom Tröpfchenradius  $\rho$ . MIE [2] hat mit Hilfe der MAXWELLSchen Theorie das Problem der Streuung einer ebenen elektromagnetischen Welle der Wellenlänge  $\lambda$  an einer Kugel (Radius  $\rho$ ) bekannter Dielektrizitätskonstante und Permeabilität allgemein gelöst. Der Verlauf der Intensität  $J(\theta)$  ist danach wesentlich durch das Verhältnis  $\alpha = 2\pi\rho/\lambda$  bestimmt. Die numerische Auswertung für Wassertropfen wurde später von SHOULEJKIN [3] für  $\alpha = 1$  und  $\alpha = 3$ , von BLUMER [4] für  $\alpha = 1,5$  und  $\alpha = 3$ , von PARANJPE, NAIK und VAIDYA [5] für  $\alpha = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20$  und 30 sowie von HOLL [5 a] für  $\alpha$  zwischen 0,3 und 4,2 durchgeführt. Mit den Grundlagen der Theorie befaßt sich ferner eine neuere Arbeit von BUCCERIUS [5 b]. Der Verlauf der Intensität mit dem Winkel hängt danach sehr stark von  $\alpha$  ab; eine einfache Gesetzmäßigkeit ist nicht zu erkennen. Auch ist die Intensität keine glatte Funktion des Winkels, sondern mehr oder weniger „wellig“. Zu qualitativ ähnlichen Ergebnissen sind ÖBIUS [6] und ROSENBERG [7] auf anderem Wege gelangt. Eine Übersicht über die wichtigsten Arbeiten hat BLUMER [8] gegeben.

Eine experimentelle Prüfung der MIESchen Theorie unternahmen PARANJPE, NAIK und VAIDYA [9] an einer Wolke von Nebeltröpfchen. Aus dem Streulicht wurde die Wellenlänge  $\lambda = 0,68 \mu$  durch einen Monochromator ausgesondert und die Intensität mit einer Photozelle gemessen. Die Tropfengröße wurde durch Ausmessung der Corona-Erscheinungen bestimmt. Die gewonnenen Intensitätskurven entsprechen dem allgemeinen Verlauf der theoretisch berechneten Kurven,

eine Welligkeit wurde jedoch nicht festgestellt. WEBB [10] bestimmte auf photographischem Wege die Winkelabhängigkeit der Helligkeit vom „Hintergrundnebel“ einer Wilsonkammer. Blendenöffnung und Belichtungszeit wurden bei Aufnahmen unter verschiedenen Winkeln so verändert, daß jedesmal gleiche Schwärzung der Tröpfchenbilder erreicht wurde. Dann wurden mit Hilfe des SCHWARZSCHILDschen Schwärzungsgesetzes die Intensitätsverhältnisse bestimmt. Die Hintergrundhelligkeit wurde dabei nicht berücksichtigt. Die Größe der Tröpfchen wurde aus ihrer Fallgeschwindigkeit ermittelt. WEBB fand für Wassertropfen eine andere Winkelabhängigkeit als für Tröpfchen von Alkohol-Wasser-Mischungen. BRICARD [11] führte nachts Messungen an natürlichem Nebel (Tröpfchenradius  $4-10 \mu$ ) durch. Der Nebel wurde durch einen Scheinwerfer beleuchtet. Die verschiedenen Streurichtungen wurden durch Rohre ausgesondert, die strahlenförmig um ein Zentrum angeordnet waren. Am äußeren Ende der Rohre befanden sich photographische Platten, die durch das von den Tröpfchen kommende Streulicht direkt belichtet wurden. Aus der Schwärzung wurde die Belichtung ermittelt. Es ergab sich eine Intensitätskurve, die nicht mit denen von WEBB, PARANJPE oder WIENER übereinstimmte. Ähnliche Untersuchungen an atmosphärischem Dunst ( $\rho \sim 0,3 \mu$ ) führten REEGER und SIEDENTOPF [12] durch.

Abweichend von den bisherigen Meßverfahren, bei denen immer der von einer sehr großen Zahl von Tröpfchen (Nebelwolke) ausgehende Lichtstrom gemessen wurde, und deshalb Effekte der Sekundärstreuung grundsätzlich nicht ausgeschlossen werden konnten, wird in der vorliegenden Arbeit die Lichtstreuung an einzelnen wenigen Tröpfchen von Nebelspuren von  $\mu$ -Mesonen der kosmischen Strahlung in der Wilsonkammer photographisch bestimmt. Die hierbei auftretenden Schwierigkeiten wurden in Kauf genommen, damit unter denselben Bedingungen wie bei normalen Wilsonkammeraufnahmen gearbeitet werden konnte. Sekundärstreuung ist bei diesem Verfahren ausgeschlossen. Ferner soll die Helligkeit des Hinter-



grundes, die zur Schwärzung der Tröpfchenbilder beiträgt, berücksichtigt werden.

## 2. Experimentelles.

Die Untersuchungen wurden mit einer zylindrischen Wilsonkammer von 22 cm Durchmesser und 8 cm Tiefe gemacht, die von Herrn U. PREIFFER aufgebaut wurde und bei anderer Gelegenheit beschrieben wird. Die Anordnung ist in Abb. 1 skizziert. Die Beleuchtung erfolgte durch ein Gasentladungs-Blitzrohr, das mit einer Kondensatorbatterie von 120  $\mu$ F bei 3000 Volt, d. h. mit 540 Joule, betrieben wurde. Zylinderlinsen  $L$  stellten ein 4 cm breites paralleles

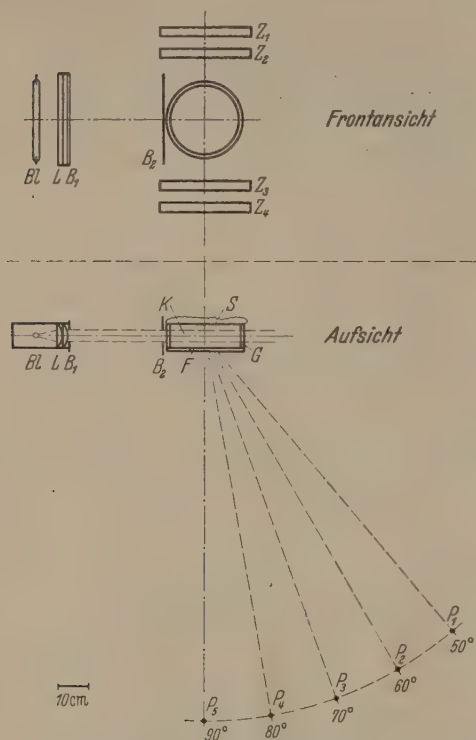


Abb. 1. Schematische Darstellung der Versuchsanordnung für die Wilsonkammeraufnahmen.

Bl Blitzrohr  $L$  Zylinderlinsen  $B_1, B_2$  Blenden

$K$  = Kammerraum der Wilsonkammer;  $G$  = Glaszylinder;

$F$  = Frontplatte;  $S$  = Samthintergrund;

$P_1-P_4$  = Position der Photoapparate;

$Z_1-Z_4$  = Auslösezählrohre.

Lichtbündel her, das, durch die Blenden  $B_1$  und  $B_2$  begrenzt, die Mitte der Kammer beleuchtete, während der schwarze Samthintergrund  $S$  und die Frontplatte  $F$  kein direktes Licht erhielten. Eine Koinzidenzanlage löste die Kammer dann aus, wenn einzelne harte Höhenstrahlteilchen, hauptsächlich  $\mu$ -Mesonen, den beleuchteten Teil der Kammer senkrecht zu den optischen Achsen der Photoapparate und senkrecht zur Lichtrichtung passierten. Der Kammerraum war mit Argon gefüllt; als Kondensationsmittel wurde eine Mischung von Äthylalkohol und Wasser im Verhältnis 2:1 verwendet. Das Expansionsverhältnis wurde so eingestellt, daß Spuren gut zu sehen waren, Hintergrundnebel aber noch nicht auftrat.

Zur Aufnahme standen drei Leica-Kameras mit Elmar-Objektiven von 9 cm Brennweite zur Verfügung. Es wurde Agfa-Fluorapid-Film verwendet, der in Agfa-Röntgen-Rapid-Entwickler bei 18° C je 6 min lang entwickelt wurde. Die Photoapparate wurden auf einem Kreis von 1,25 m Radius um die Kammer-

mitte aufgestellt. Im Laufe einer Aufnahmeserie wurden die Blendenöffnungen der Kameras sowie der Aufnahmewinkel  $\theta$  variiert (vgl. Abb. 1), während übrigen Versuchsbedingungen konstant gehalten wurden. Jede Spur wurde gleichzeitig unter drei der in Abb. 1 angegebenen Winkel photographiert; diese wurden so gewählt, daß die Resultate einer Meßserie ganzen Winkelbereich „überlappten“.

Die Auswertung der Nebelkammer-Aufnahmen geschah nach den Methoden des photographischen Helligkeitsvergleichs [13]. Für das Folgende ist es zweckmäßig, die sog. Transparenz  $\tau$  einer geschwärzten Stelle des Films zu kennen. Sie hängt mit der in der Regel angegebenen Schwärzung  $S$  folgendermaßen zusammen:

$$S = \log \frac{1}{\tau}.$$

Schwärzung bzw. Transparenz wurden mit Hilfe eines selbstgebauten Mikro-Schwärzungsmessers üblicher Konstruktion gemessen. Um eine Beziehung zwischen der gemessenen Transparenz  $\tau$  und der Belichtung, d. h. dem Zeitintegral über die Beleuchtungsstärke (= wirksame Lichtquanten pro Zeit- und Flächeneinheit) zu erhalten, mußte man für jeden Film mit Hilfe eines Stufenkeils die sog. Transparenzkurve aufnehmen. Hierzu war es notwendig, auf jeden Film geeigneter Weise zwei Aufnahmen des Stufenkeils anzunehmen, die sich um den Faktor 2 in der Helligkeit (= Blendenöffnungen  $f=18$  und 25) unterschieden. Der Stufenkeil wurde zwischen zwei schwärzmatte Glasscheiben gebracht, aus 4 m Entfernung durch das Blitzrohr beleuchtet, und von hinten aus 1 m Abstand photographiert. Dabei wurde durch eine Umhüllung dafür gesorgt, daß nur Licht, das die Spalten des Keils passiert hatte, in die Kamera gelangte.

## 3. Eliminierung der Hintergrundbeleuchtung bei Wilsonkammeraufnahmen.

Wir setzen also voraus, daß für jeden Film eine Eichkurve vorliegt, aus der die Transparenz  $\tau$  als Funktion der Belichtung bzw. der Beleuchtungsstärke  $E$  und umgekehrt abgelesen werden kann (vgl. auch die spätere Abb. 4):

$$\tau = f(E); \quad E = g(\tau).$$

Bei der Auswertung der unter identischen Bedingungen gemachten Aufnahmen der Nebelspuren wird fernere Voraussetzung, daß die Beleuchtung der Spur selbst jedesmal gleichstark ist, daß die Größe der Tröpfchen jedesmal dieselbe ist, und daß die zum Winkel  $\theta$  gehörige sekundäre Lichtstärke  $J(\theta)$  der Tröpfchen in folgedessen bei allen Aufnahmen die gleiche ist. Würde der Hintergrund vollkommen dunkel, so wäre die Beleuchtungsstärke  $E(\theta)$  auf dem Film am Ort eines Tröpfchenbildes bei gleicher Bildgröße proportional  $J(\theta)$ , und die Messung der Schwärzung des Tröpfchenbildes würde das gesuchte Resultat liefern. In Wirklichkeit wird der Hintergrund der Nebelkammer durch Streulicht immer schwach beleuchtet, und das vom Hintergrund kommende Licht auf seinem Weg zur Objektiveöffnung nur unerheblich durch die dazwischenliegenden Nebeltröpfchen geschwächt. Am Ort des Tröpfchenbildes tritt also zu  $E(\theta)$  noch eine Beleuchtungsstärke  $E_H$  hinzu, die praktisch gleich der der Umgebung des Tröpfchenbildes allein wirkende ist. Die zu erwartende Transparenz eines einzelnen



pfchenbildes ist deshalb nach (2)

$$t = f(E(\vartheta) + E_H); \quad E(\vartheta) + E_H = g(t) \quad (3)$$

die des Hintergrundbildes

$$h = f(E_H); \quad E_H = g(h), \quad (3a)$$

aus für die vom Tröpfchen herrührende Beleuchtungsstärke folgt

$$E(\vartheta) = g(t) - g(h). \quad (4)$$

Transparenz eines einzelnen Tröpfchenbildes ante nicht gemessen werden, weil es zu klein ist die Empfindlichkeit des Schwärzungsmessers at ausreichte. Es wurde daher die Transparenz es ganzen Spurstückes (Abb. 2) bestimmt und auf se Weise gleich über mehrere Tröpfchenbilder ge stellt. Dazu wird die Spur genau in Richtung des alts des Schwärzungsmessers eingespannt, und die altbildbreite etwa gleich der Spurbreite gemacht. nn wird die Spur quer zum Spalt verschoben und zugehörige Transparenz  $\tau$  als Funktion der Ver ieubung  $x$  gemessen. Man erhält dabei einen Ver lf, wie er für ein Beispiel in Abb. 3 angegeben ist. r Minimalwert  $m$  der Transparenz tritt auf, wenn h die Spur mitten im Spalt befindet. An dieser elle ist  $h$  die Transparenz des Hintergrundes, die n durch eine (nicht immer ganz eindeutige) Inter ation der nicht durch das Spurbild beeinflussen urvenstücke erhält. Der Wert  $m$  ist ein Mittelwert s Tröpfchenbildtransparenz  $t$  und Hintergrund- nsparenz  $h$ . Ist  $\lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$ , das Verhältnis der samtläche aller Tröpfchenbilder innerhalb des altbildes zur Fläche des Spaltbildes, so folgt:

$$m = (1 - \lambda) h + \lambda t. \quad (5)$$

$\lambda$  nicht gemessen werden kann, wurde es auf fol- nde Weise eliminiert: Man bestimmt für 2 verschie- ne Winkel  $\vartheta'$  und  $\vartheta''$ , bei denen dieselbe Spur sichzeitig auf zwei Filmen 1 und 2 aufgenommen arde, die Größe

$$= (1 - \lambda) h' + \lambda t' \quad \text{und} \quad m'' = (1 - \lambda) h'' + \lambda t''$$

und daraus

$$(h'' - t'')/(h' - t') = (h'' - m'')/(h' - m')$$

er

$$t'' = ((h'' - m'')/(h' - m')) t' + (h' m'' - m' h'')/(h' - m') = at' + b = l(t'). \quad (6)$$

(6) sind  $t''$  und  $t'$  die einzigen unbekannten Größen, wischen denen (6) eine die Messung enthaltende Be- ehung herstellt. Man kann nun in (6) die Größen  $t'$  und  $t''$  statt als Unbekannte als Variable auffassen. ann entspricht (6) der Gleichung einer Geraden urch die Punkte  $H(h', h'')$  und  $M(m', m'')$ . Jeder unkt  $T(t', t'')$  dieser Geraden erfüllt die Gleichung (6). an kann nun jedem Wert  $t'$  mittels (4) eine fik- ve Beleuchtungsstärke  $E'_T$  des Tröpfchenbildes auf ilm 1 zuordnen, so daß

$$E'_T = g_1(t') - g_1(h') \quad (7a)$$

und ebenso zu  $t''$  eine fiktive Beleuchtungsstärke  $E''_T$

$$E''_T = g_2(t'') - g_2(h''). \quad (7b)$$

iese fiktiven Beleuchtungsstärken hängen durch (6) iteinander zusammen, so daß man zusammen mit

(3) schreiben kann:

$$E''_T = g_2(l(t')) - g_2(h'') = g_2\{l(f_1[E'_T + g_1(h')])\} - g_2(h'') = F(E'_T). \quad (8)$$

Diese Funktion  $E''_T = F(E'_T)$  kann mittels der Eich- kurve (2) und der Gl. (6) vollständig graphisch dar- gestellt werden. Jeder Punkt dieser Kurve entspricht einem Punkt der Geraden (6), d. h. jeweils auch einem bestimmten Wert von  $\lambda$ . Den wahren aber unbekann- ten Transparenzen  $t'$  und  $t''$  der Tröpfchenbilder ent- spricht auf der durch (8) definierten Kurve ein Punkt  $P$ , dessen Koordinaten  $E'_T = E(\vartheta')$  und  $E''_T = E(\vartheta'')$  die gesuchten Werte der von einem Tröpfchen herrührenden Beleuchtungsstärken angeben. Diesen Punkt  $P$  müssen aber alle Kurven  $E''_T = F(E'_T)$  ge- meinsam haben, die aus Messungen an verschiedenen, unter gleichen Aufnahmebedingungen gewonnenen Spurbildern hervorgehen, bei denen  $E_H$  verschieden ist. D. h.  $P$  ist Schnittpunkt der Kurvenschar (8). Prak-



Abb. 2. Vgl. Text.

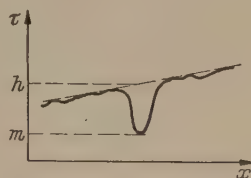


Abb. 3. Vgl. Text.

tisch verlaufen derartige Kurven, die an verschiedenen Spuren gewonnen werden, meist sehr ähnlich, schnei- den sich daher meist unter kleinen Winkeln oder über- haupt nicht, so daß die Lage von  $P$  noch mit großen Unsicherheiten behaftet ist. Man kann jedoch leicht dadurch weitere Kurven vom Typ (6) zur Bestimmung von  $P$  erhalten, wenn man z. B. beim Winkel  $\vartheta''$  die Fläche der Blende um den Faktor  $q''$  vergrößert. Dann werden die Beleuchtungsstärken  $E(\vartheta'')$  und  $E''_H$  beide um einen Faktor  $q''$  vergrößert. Wegen der Krümmung der Transparenzkurve ändern sich  $h''$  und  $t''$  um verschiedene Beträge, und es gehen ganz andere Konstanten  $m''$  und  $h''$  in (6) und (8) ein, so daß auch der Verlauf der Kurve  $E''_T = F(E'_T)$  stärker verändert wird. Für  $E'_T = E(\vartheta')$  wird aber jetzt  $F(E(\vartheta')) = q'' \cdot E(\vartheta'')$ , daher kann erst die der Funktion  $E'_T = (1/q'') \cdot F(E'_T)$  entsprechende Kurve mit der ersten Kurvenschar den Punkt  $P$  gemeinsam haben.

Wird außerdem beim Winkel  $\vartheta'$  die Fläche der Blende um den Faktor  $q'$  vergrößert, so ergibt sich wiederum eine anders verlaufende Kurve. Um alle diese Kurven miteinander vergleichen zu können, muß man statt (8) folgende für alle Blendenkombi- nationen gültige Gleichung verwenden, die für  $q' = q'' = 1$  in (8) übergeht:

$$E''_T = F(E'_T) = \frac{1}{q''} g_2\{l(f_1[q' E'_T + q' g_1(h')])\} - \frac{1}{q''} g_2(h''). \quad (9)$$

In dieser Gleichung beziehen sich die Werte  $E_T$  und  $E_H = g(h)$  auf eine von der speziellen Blendeneinstel- lung unabhängige Einheit. Werden alle Beleuchtungs-



stärken auf Blende  $f = 18$  bezogen, so wird

$$q' = \left(\frac{18}{f'}\right)^2; \quad q'' = \left(\frac{18}{f''}\right)^2. \quad (10)$$

Die Schnittpunkte der aus einer Anzahl von Spuren bestimmten Kurven vom Typ (9) werden in einem gewissen Bereich liegen; innerhalb der durch diesen Bereich gegebenen Fehlergrenzen liegt das gesuchte Verhältnis der Tröpfchenlichtstärke

$$\frac{J(\vartheta'')}{J(\vartheta')} = \frac{E(\vartheta'')}{E(\vartheta')}. \quad (11)$$

#### 4. Auswertung der Messungen.

Aus den oben angestellten Überlegungen ergeben sich folgende Gesichtspunkte zur Herstellung der Aufnahmen. 1. Die Tröpfchenbildtransparenz muß gut

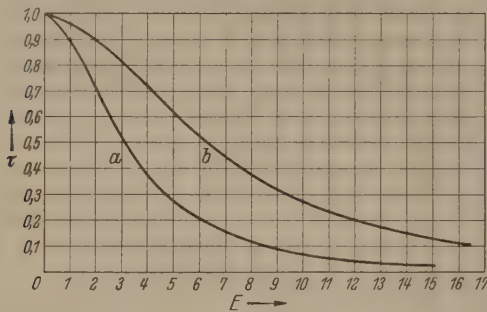


Abb. 4. Transparenzkurve.  $a: \tau = f(E)$  bei Blende 18;  $b: \tau = f(E/2)$  bei Blende 25. Aus Kurve  $a$  ist auch die Umkehrfunktion  $E = g(\tau)$  zu entnehmen (Gl. (2)).

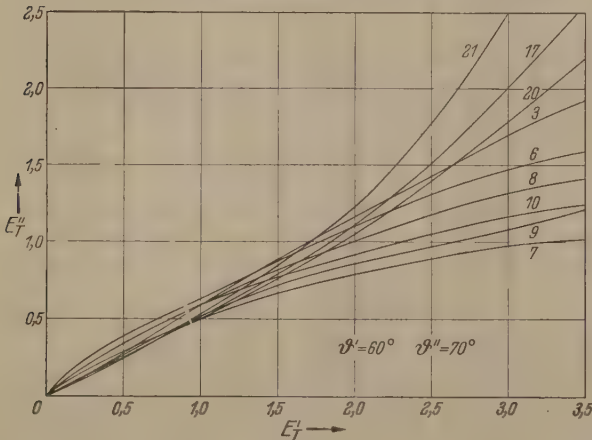


Abb. 5. Von den Tröpfchen herrührende Beleuchtungsstärke  $E_T''$  als Funktion von  $E_T'$ , abgeleitet aus der Beziehung  $t'' = l(t')$  zwischen den Transparenzen  $t''$  und  $t'$  der unter den Winkeln  $\vartheta''$  und  $\vartheta'$  aufgenommenen Bilder derselben Nebeltröpfchen und den Transparenzkurven der jeweiligen Filme.

Blendeneinstellung: Spur 3 u. 6:  $f' = 18$   $f'' = 18$   
 Spur 7—10:  $f' = 12,5$   $f'' = 12,5$   
 Spur 17, 20, 21:  $f' = 18$   $f'' = 12,5$

meßbar, d. h. nicht zu klein sein. 2. Die wegen (9) erforderliche Variation der Blendenöffnung darf die Größe der Tröpfchenbilder nicht ändern. 3. Die Spurbilder sollen eine gleichmäßige, möglichst dunkle Umgebung haben. 4. Die Aufnahmebedingungen in der Wilsonkammer, d. h. Tröpfchengröße und die Helligkeit des Blitzrohrs müssen möglichst konstant sein.

Aus einer größeren Anzahl von Versuchen wurden unter diesen Gesichtspunkten von 21 verschiedenen Spuren rund 60 Aufnahmen ausgewählt, die sich durch den Aufnahmewinkel  $\vartheta$  und die Blende  $f$  unterscheiden. Für jeden Film wurde die Transparenzkurve (2) mit Hilfe der in Abschn. 2 erwähnten Stufenkeilaufnahmen festgelegt. Die Abb. 4 zeigt eine solche Transparenzkurve, bei der  $E$  in den willkürlichen Einheiten

$E_0$  gemessen ist. Jedes Spurbild wurde mit einem Schwärzungsmesser vermessen und daraus  $h$  und  $a$  abgeleitet. Dann wurden für geeignete Aufnahmepaare für alle möglichen Winkel- und Blendenkombinationen gemäß (6), (8) und (9) die Kurven  $E_T'' = F(E_T')$  gezeichnet. Die berücksichtigten Winkel findet man in Abb. 1. Die sich ergebenden Kurvenscharen für Winkelpaar  $\vartheta' = 60^\circ$ ,  $\vartheta'' = 70^\circ$  sind in der Abb. 1 als Beispiel angegeben. Ähnliche Kurvenscharen gaben sich für die Winkelpaare:  $50^\circ$  und  $60^\circ$ ;  $70^\circ$  und  $80^\circ$ ;  $80^\circ$  und  $90^\circ$ ;  $50^\circ$  und  $70^\circ$ ;  $60^\circ$  und  $80^\circ$ ;  $70^\circ$  und  $90^\circ$ . Man kann den Bereich, in dem die Schnittpunkte liegen, zwischen zwei Ursprungsgeraden einschließen. Die Steigungen dann eine untere und obere Grenze für das Verhältnis  $E(\vartheta'')/E(\vartheta') = J(\vartheta'')/J(\vartheta')$  geben. Setzt man noch  $J(60^\circ) = 1$ , so ergeben sich die in der Tabelle 1 aufgeführten Werte für  $J(\vartheta)$ .

Tabelle 1.

Streuintensitäten  $J(\vartheta)$ , die aus den die Schnittpunkte der Kurven  $E_T'' = F(E_T')$  einschließenden Ursprungsgeraden gewonnen wurden.

$\vartheta^\circ$	$J(\vartheta)$ , Winkeldifferenzen $10^\circ$			$J(\vartheta)$ , Winkeldifferenzen		
	min	max	mittel	min	max	mittel
50	1,70	1,28	1,46	1,43	1,40	1,42
60	1,00	1,00	1,00	—	—	—
70	0,50	0,59	0,545	0,50	0,59	0,54
80	0,22	0,36	0,29	—	—	—
90	0,14	0,30	0,21	0,16	0,22	0,19

Außerdem wurden die Kurvenscharen  $E_T'' = F(E_T')$  noch auf einem etwas anderen Wege ausgewertet. Für jedes Winkelpaar  $\vartheta'$ ,  $\vartheta''$  wurde eine Mittelwertkurve gebildet, die so, daß ihre Ordinate gleich dem arithmetischen Mittel  $\overline{E_T''}$  der Ordinate aller Kurven der Schar sind. Diese Mittelwertkurve würde, wenn die Kurven  $E_T'' = F(E_T')$  alle den Punkt  $P(E(\vartheta'), E(\vartheta'))$  gemeinsam hätten, ebenfalls durch diesen Punkt gehen. In Wirklichkeit ist dies nur innerhalb der Fehlergrenzen der Fall. Es zeigt sich nun, daß die Mittelwertkurven alle nur sehr wenig gekrümmt sind und sehr gut durch eine Ursprungsgerade angenähert werden können; d. h.  $\overline{E_T''}/E_T'$  ist von  $E_T'$  nur wenig abhängig. Aus diesen Mittelwertkurven wurden  $E(\vartheta)$  bzw.  $J(\vartheta)$  auf folgende Weise gewonnen. Ausgehend von einem willkürlichen Wert  $E_T' = E$  für  $\vartheta = 50^\circ$  ergibt sich aus der Mittelwertkurve  $E_T''$  bestimmter Wert  $E_T'' = E(60^\circ)$  für  $\vartheta = 60^\circ$ . Nimmt man diesen Wert  $E(60^\circ)$  für  $E_T'$  in der Mittelwertkurve für das Winkelpaar  $\vartheta = 60^\circ$  und  $\vartheta = 70^\circ$ , erhält man  $E_T'' = E(70^\circ)$  und so fort. Dies kann man für verschiedene Ausgangswerte  $E_T' = E(50^\circ)$  durchführen und erhält so eine Schar von zueinander gehörenden Beleuchtungsstärken  $E(\vartheta)$  und von dazu gehörenden Lichtstärken  $J(\vartheta)$ . Ihre Mittelwerte, normiert auf  $J(60^\circ) = 1$ , zeigt die Tabelle 2, wobei die angegebenen Grenzen die maximalen Abweichungen der Einzelwerte vom Mittelwert bedeuten. Die Werte weichen kaum von den Mittelwerten der Tab. 1 ab.

Tabelle 2.

Streuintensitäten  $J(\vartheta)$ , die aus den Mittelwertkurven der Schar  $E_T'' = F(E_T')$  gewonnen wurden, für Winkeldifferenzen von  $10^\circ$

Winkel $\vartheta^\circ$	50	60	70	80	90
Lichtstärke $J$ :	$1,46 \pm 0,03$	1	$0,52 \pm 0,01$	$0,27 \pm 0,01$	$0,20 \pm 0,01$



Tab. 3 zeigt die auf genau dieselbe Weise aus den Kurvenscharen  $E_T'' = F(E_T')$  mit einer Winkeldifferenz von  $20^\circ$  gewonnenen Resultate. Die Abweichungen vom Mittelwert sind hier etwas größer (vgl. Abschn. 5). Bei den Auswertungen, die den Ta-

Tabelle 3.

Streuintensitäten  $J(\vartheta)$ , die aus den Mittelwertskurven der Scharen  $E_T'' = F(E_T')$  gewonnen wurden, für Winkeldifferenzen von  $20^\circ$ .

	50	70	90	60	80
$J$ :	$1,46 \pm 0,02$	$0,55 \pm 0,03$	$0,20 \pm 0,02$	1	$0,30 \pm 0,03$

den 2 und 3 zugrunde liegen, wurde darauf geachtet, die Ausgangswerte  $E_T'$  bei  $50^\circ$  (bzw. bei  $60^\circ$  im Teil der Tabelle 3) innerhalb der durch das Meßverfahren und der durch das Bild der Kurvenscharen in Typ der Abb. 5 gegebenen oberen und unteren Grenzen liegt. Diese Diskussion soll hier nicht im einzelnen durchgeführt werden<sup>1</sup>.

### 5. Diskussion der Fehlermöglichkeiten.

Zur Beurteilung der Genauigkeit der im vorigen Abschnitt gewonnenen Resultate sind folgende Fehlerquellen zu berücksichtigen.

A. Die vom Blitzrohr ausgestrahlte Lichtmenge kann um rund 3% schwanken, da die Spannung an der Kondensatorbatterie nur innerhalb der Grenzen der Glimmlampenstabilisierung konstant war.

B. Obwohl ein paralleles Lichtbündel in die Kammer eintrat, befand sich, z. B. infolge der Reflexion an der gegenüberliegenden Wand diffuses Streulicht in der Kammer, das die Streuintensität  $J(\vartheta)$  besonders bei den großen Winkeln  $\vartheta = 80^\circ$  und  $90^\circ$ , wo  $J(\vartheta)$  klein ist, verfälschen kann. Dieser Fehler ist schwer abzuschätzen.

C. Wäre das Streulicht unpolarisiert, so würde es beim Passieren der Frontglasplatte der Wilsonkammer in Abhängigkeit von  $\vartheta = 50^\circ$  und  $\vartheta = 90^\circ$  nahezu unabhängig vom Winkel geschwächt. Nach der Theorie von MIE ist es jedoch z. T. polarisiert. Der hierdurch verursachte Fehler von  $J(\vartheta)$  kann bei den Winkeln  $\vartheta = 50^\circ$  und  $60^\circ$  bis zu 4% betragen.

D. Die Blende am Objektiv der Photoapparate konnte, wie photometrisch kontrolliert wurde, nur auf etwa 3% genau eingestellt werden. Diese Unsicherheit geht in die Kurvenscharen  $E_T'' = F(E_T')$ , Abb. 5, ein.

E. Der Tröpfchenradius wurde nicht bestimmt, kann also nur abgeschätzt werden. Nach Messungen von BARRET und GERMAIN [14] ist das Wachstum des Tröpfchenradius  $\varrho$  [ $\mu$ ] mit der Zeit  $t$  [sec] in einer mit Luft gefüllten Kammer gegeben durch:

$$\varrho(t) = 21,5 \cdot \sqrt{t} \quad \text{für Alkohol-Wassertröpfchen;}$$

$$\varrho(t) = 27,5 \sqrt{t} \quad \text{für reine Wassertröpfchen.}$$

Es wurde sorgfältig darauf geachtet, daß die Aufnahmen alle in der Zeit zwischen 0,09–0,25 sec nach der Expansion erfolgten. Die zugehörigen Tröpfchenradien sind 6,5 und 11  $\mu$  bzw. 8 und 14  $\mu$ . WEBB [10] bestimmte Tröpfchenradien von 11,5 bzw. 9,6  $\mu$  aus der Fallgeschwindigkeit. Bei unseren Wilsonkammeraufnahmen wird demnach der Tröpfchenradius zwischen 6 und 12  $\mu$  liegen, und nur wenig schwanken;

entsprechend ergibt sich eine geringe Schwankung der Tröpfchenlichtstärken.

F. Der Lichtstrom  $\Phi$ , der von einem Tröpfchen ausgehend in das Objektiv fällt, trifft auf dem Film den Bereich des Tröpfchenbildes. Die mittlere für die Schwärzung des Tröpfchenbildes maßgebliche Beleuchtungsstärke wird dann  $E = \Phi/\pi r^2$ , wenn  $r$  der Radius des Tröpfchenbildes ist. Die Größe der Tröpfchenbilder auf dem entwickelten Film hängt von folgenden Faktoren ab: a) Tröpfchengröße (bei opt. Abbildung); b) Beugung an der Objektivöffnung; c) Tiefenschärfe; d) Linsenfehler; e) Auflösungsvermögen der Emulsion; f) Stärke der Belichtung.

Zu a. Für das in  $E$  angegebene maximale  $\varrho = 12 \mu$  wird der Radius des optischen Tröpfchenbildes  $r_1 \approx 1 \mu$ .

Zu b. Wäre das Tröpfchen ein leuchtender Punkt, so wäre der Radius des Beugungsbildes, auf dem die Bildhelligkeit auf die Hälfte sinkt,  $r_2 \approx 4,5 \mu$  (bei Blende = 18).

Zu c. In einem 4 cm tiefen Kammerraum, dessen Mitte scharf abgebildet wird, ruft ein nicht in der Mitte liegendes Tröpfchen im ungünstigsten Fall für einen leuchtenden Punkt bei Blende  $f = 18$  einen Unschärfekreis mit dem Radius  $r_3 \approx 7 \mu$  hervor.

Der maximale Tröpfchenbildradius werde nun etwas willkürlich zu  $r = r_1 + r_2 + r_3$  angenommen. Dann wird in keinem unserer Fälle der Tröpfchenbildradius größer als 13  $\mu$ . Einflüsse von Linsenfehlern nach d) mögen neben  $r$  vernachlässigt werden.

Zu e. Das Auflösungsvermögen hochempfindlicher Filme liegt bei 24  $\mu$ , d. h. Objekte, deren Bilddurchmesser kleiner als 24  $\mu$  ist, erscheinen auf dem Film mit einem scheinbaren Durchmesser von ca. 24  $\mu$ . Nach dem zu c) Gesagten folgt, daß alle Tröpfchenbilder einen einheitlichen Durchmesser von etwa 24–26  $\mu$  haben dürften. Hierdurch wird die bei der Auswertung benutzte Annahme begründet, daß die Schwärzung eines Tröpfchenbildes einer Beleuchtungsstärke entspricht, die proportional dem durch die Öffnung des Objektivs kommenden Lichtstrom ist, wie es sonst nur für die Abbildung von Flächen, aber nicht von Punkten gilt.

Zu f. Wegen der nach dem Rande abnehmenden Helligkeit ist die Grenze eines Tröpfchenbildes nicht scharf definiert, hängt also etwas von der Stärke der Belichtung ab. Wenn bei dem hier benutzten Auswertungsverfahren die unter zwei benachbarten Winkeln  $\vartheta'$  und  $\vartheta''$  gewonnenen Aufnahmen verglichen wurden, so waren entweder beide Blendenöffnungen gleich und die Belichtungen verschieden, oder die Blenden verschieden und die Belichtungen annähernd gleich. In beiden Fällen ist der Vergleich nicht ganz exakt, weil nicht zu erwarten ist, daß die Tröpfchenbilder in einander entsprechenden Aufnahmen die gleiche Größe haben. Diese Unterschiede können um so größer sein, je größer die Winkeldifferenz  $\vartheta'' - \vartheta'$  ist, weil dann auch das Verhältnis  $J(\vartheta'')/J(\vartheta')$  größer wird. Daher ist den Ergebnissen in Abschnitt 4 mit den Winkeldifferenzen von  $20^\circ$  ein geringeres Gewicht beizulegen als denen mit  $10^\circ$ .

G. Der beim Photometrieren der Bahnsuren (Abb. 2) auftretende Fehler ist gering, wie wiederholte Messungen zeigten. Auch der Minimalwert  $m$  der Transparenz (Abb. 3) war sehr gut reproduzierbar.

<sup>1</sup> Vgl. Diplom-Arbeit von M. S. ELSAESSER, Göttingen 1951; unveröffentlicht.



Dagegen ist die Hintergrundtransparenz  $h$  am Ort der Spur, die aus der Umgebung extrapoliert werden mußte, unsicher.  $\Delta h/h$  kann 0,5–2% betragen. Im ungünstigsten Fall kann dies Fehler  $\Delta E_T/E_T$  von 2 bis maximal 20% für jedes einzelne  $E_T'$  verursachen.

H. Eine weitere Fehlerquelle wären Unvollkommenheiten des Stufenkeils. Auf die Prüfung des Stufenkeiles und den Verlauf der Transparenzkurven wurde besondere Sorgfalt verwendet. Die Fehler, die durch den Stufenkeil verursacht werden, dürften neben den übrigen nicht ins Gewicht fallen.

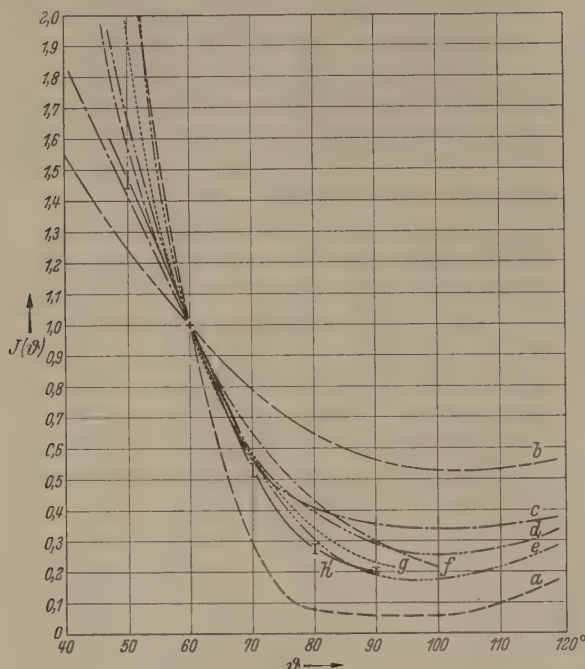


Abb. 6. Lichtstärke  $J(\theta)$  von Wassertröpfchen als Funktion des Winkels zwischen Beobachtungs- und Beleuchtungsrichtung nach Angaben verschiedener Autoren, bezogen auf  $J(60^\circ) = 1$ ;  $\rho$  = Tröpfchenradius;  $\lambda$  = Lichtwellenlänge.

- a) ——— Theoret. Kurve nach WIENER ( $\rho > \lambda$ )
- b) ——— Exper. Kurve nach BRICARD ( $\rho = 4$  bis  $8 \mu$ )
- c) ——— Exper. Kurve nach PARANJPE ( $\rho = 1,096 \mu$ ;  $\lambda = 0,68 \mu$ )
- d) ——— Exper. Kurve nach PARANJPE ( $\rho = 2,19 \mu$ ;  $\lambda = 0,68 \mu$ )
- e) ——— Exper. Kurve nach PARANJPE ( $\rho = 3,28 \mu$ ;  $\lambda = 0,68 \mu$ )
- f) ——— Exper. Kurve nach WEBB ( $\rho = 11,5 \mu$ ; Alkohol + Wasser)
- g) ——— Exper. Kurve nach WEBB ( $\rho = 9,6 \mu$ ; Wasser)
- h) ——— Exper. Kurve nach eigenen Messungen ( $\rho = 6$  bis  $12 \mu$ ; Alkohol + Wasser)

Zusammenfassend kann man sagen: Die unter B., C., D., F. und H. genannten Fehlermöglichkeiten können zu geringen systematischen Fehlern führen, während die unter A., E. und G. genannten Fehlerquellen mehr zufälligen Charakter haben. Abgesehen von dem unter C genannten Polarisisationseffekt wirken sich alle auftretenden Fehler auf die Streuung der Kurven vom Typ der Abb. 5 aus und werden sich nach dem GAUSSschen Fehlerfortpflanzungsgesetz zusammensetzen. Unter Berücksichtigung dieser Tatsachen läßt sich ein mittlerer relativer Fehler der Verhältnisse  $J(\theta'')/J(\theta')$  abschätzen, der für  $\theta'' - \theta' = 10^\circ$  unter 6%, für  $\theta'' - \theta' = 20^\circ$  unter 9% liegt. Eine gewisse Bestätigung kann darin erblickt werden, daß eine Messung, die außerhalb der dieser Arbeit zugrundeliegenden nach derselben Methode, aber unter anderen Versuchsbedingungen durchgeführt und mit einem anderen Stufenkeil ausgewertet wurde, für das Verhältnis  $J(70^\circ)/J(60^\circ)$  den Wert 0,53 ergab, was mit

den in den Tab. 1 bis 3 angegebenen gut übereinstimmt.

## 6. Vergleich mit Messungen anderer Autoren.

Zum Schluß seien unsere Ergebnisse noch kurz und ohne den Versuch einer genaueren Diskussion, mit denen einiger anderer Autoren verglichen, deren Ergebnisse zu diesem Zweck ebenfalls auf  $J(60^\circ) = 1$  normiert wurden. Das Resultat zeigt Abb. 6. Die eigene Kurve weicht stark von der theoretischen Kurve nach WIENER [1] für Tröpfchen mit gegen die Lichtwellenlänge großem Radius ab. Ebenfalls sind die Abweichungen von der experimentellen Kurve von BRICARD [11], die aus Messungen an natürlichem Nebel gewonnen wurde, erheblich. Zwischen  $60^\circ$  und  $90^\circ$  stimmen dagegen unsere Messungen mit den experimentellen Werten, die PARANJPE [9] für Nebeltröpfchen vom Radius  $\rho = 3,28 \mu$  mit Lichtwellenlänge  $\lambda = 0,68 \mu$  gefunden hat, überein, während unser Wert für  $\theta = 50^\circ$  wesentlich tiefer liegt.

Aus dem Gang der drei experimentellen Kurven von PARANJPE und der Kurve von WIENER könnte man schließen, daß die Winkelabhängigkeit der Streuintensität  $J(\theta)$  mit zunehmendem Tröpfchenradius stärker wird. Dem widersprechen aber die Messung von BRICARD an natürlichem Nebel ( $\rho = 4$  bis  $8 \mu$ ), die eine schwächere Winkelabhängigkeit aufweisen, die von PARANJPE bei  $\rho = 1,1 \mu$  gefundenen Werte.

Die Messungen von WEBB [10], die am Hinterrundnebel einer Wilsonkammer durchgeführt wurden, zeigen starke Streuungen, so daß WEBB durch seine wenigen Meßpunkte eine interpolierende Kurve legen mußte, die nicht viel von unserer abweicht.

Ein Vergleich der eigenen Messungen mit der Theorie von MIE [2] ist nicht nur deshalb schlecht möglich, weil unsere Tröpfchenradien relativ unsicher sind, sondern auch weil das Spektrum der Blitzlampe kontinuierlich ist [15], und man selbst bei einheitlicher Tröpfchengröße über den Wellenlängenbereich integrieren müßte. Nimmt man an, daß entsprechende Abschätzung im Abschnitt 6 der Radius der Tröpfchen zwischen 6 und  $12 \mu$  liegt, so wird bei der Lichtwellenlänge  $\lambda = 0,45 \mu$  das in die Theorie von MIE eingehende Verhältnis  $\alpha = 2\pi\rho/\lambda = 84$  bis 168. Bisher wurden die Intensitätskurven nur bis  $\alpha = 30$  berechnet, da die Rechnung für größere  $\alpha$  sehr umständlich wird. Möglicherweise bietet das asymptotische Verfahren von BUCCERIUS [5b] hier eine Erleichterung.

Herrn Dipl. Phys. U. PREFFER danken wir vielmals für die Möglichkeit, an seiner Wilsonkammer Aufnahmen durchführen zu können.

## Zusammenfassung.

An den Bahnen einzelner schneller Teilchen der kosmischen Strahlung in einer Wilsonkammer wird die Lichtstreuung von Nebeltröpfchen einer Alkohol-Wassermischung in Abhängigkeit vom Winkel einer photographischen Methode untersucht. Die Bedingungen entsprechen denen der üblichen Wilsonkammertechnik: Das parallele Licht einer Geiger-entladungs-Blitzlampe wird seitlich gestreut und mittels mehrerer gleicher Photoapparate gleichzeitig unter verschiedenen Winkeln photographiert. Aus der Schwärzung des Films wird auf die Lichtintensität geschlossen. Durch ein spezielles Auswertungsv



en wird das vom Hintergrund der Kammer kommende Streulicht eliminiert. Für Streuwinkel zwischen und  $90^\circ$  sinkt die Streuintensität etwa um den Faktor 7. Die Ergebnisse werden mit denen einiger anderer Autoren an natürlichen und künstlichen Blitzen verglichen. Die eigenen Messungen schließen sich als Sekundärstreuung aus.

**Literatur.** [1] WIENER, CHR.: Abhandl. d. Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher Bd. 73, 907). — [2] MIE, G.: Ann. Physik 25, 377 (1908). — SHOLEJIKIN, W.: Philos. Mag. 48, 307 (1924). — [4] BLUM, H.: Z. Physik 32, 119 (1925); 38, 304 (1926). — PARANJPE, G. R., Y. G. NAIK and P. B. VAIDYA: Proc.

Indian Acad. (A) 9, 333 (1939). — [5 a] HOLL, H.: Optik 1, 213 (1946). — [5 b] BUCCERIUS, H.: Optik 1, 188 (1946). — [6] MÖBIUS, W.: Ann. Physik 40, 736 (1913). — [7] ROSENBERG, J.: Ann. Physik 68, 414 (1922). — [8] BLUMER, H.: Z. Physik 38, 920 (1925). — [9] PARANJPE, G. R., Y. G. NAIK and P. B. VAIDYA: Proc. Indian Acad. (A) 9, 352 (1939). — [10] WEBB, C. G.: Philos. Mag. 19, 927 (1935). — [11] BRICARD, J.: Ann. Physique 14, 148 (1940); C. R. 213, 136, 495 (1941). — [12] REEGER, E. und H. SIEDENTOFF: Optik 1, 15 (1946). — [13] ANGERER, E. v.: Wissenschaftliche Photographie, Leipzig 1939. — [14] BARRET, E. O. and L. S. GERMAIN: Rev. sci. Instruments 18, 84 (1947). — [15] ALDINGTON, J. N. und A. J. MEADOWCROFT: J. Instn. electr. Engr. 95, II., 671 (1948).

Dipl. Phys. MARTIN S. ELSAESSER, Prof. Dr. KARL WIRTZ, Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen.

## Untersuchungen an Blitzlampen zur Beleuchtung von WILSON-Kammern.

VON BERNHARD MEYER, Göttingen.

(Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen.)

Mit 5 Textabbildungen.

(Eingegangen am 25. September 1952.)

**1. Gasentladungs-Blitzlampen.** Für die Photographie von Nebelspuren in einer Wilsonkammer benötigt man Dauerbetrieb eine kräftige und leicht steuerbare Beleuchtung, die keine Erwärmung der Umgebung verursacht. Als solche hat sich jetzt die Gasentladungslampe vollständig durchgesetzt und ist in verschiedenen Ausführungen im Handel erhältlich. Angaben über den Betrieb von Blitzlampen und Messungen der Lichtausbeute findet man in der Literatur von ALDINGTON und MEADOWCROFT [1], KNOTT [14], ARMOLTZ [25] und CARLSON und PRITCHARD [2]. Die photoelektrische Meßanordnung beschreiben PROJECTOR und BARBROW [20]. Ausführliche elektrische Charakteristiken geben EDGERTON, GERMERSHUSEN, KILLIAN und MURPHY [3], [4], [5], [6] und LAPORTE, LEGROS, CLOUPEAU und ROUX [15], [16], [17] und [18] sowie PORTER und NORRISH [19] haben sich mit der Intensität und der spektralen Verteilung des Strahlungs befaßt. Von deutschen Autoren sind vorwiegend Untersuchungen mit Funkenentladungen gemacht worden. Umfangreiche Messungen dazu hat B. GLASER [12], [13] durchgeführt, außerdem FÜNFER [10], GÄNGER [11], RAETHER [21] und ROMPE, HULZ [23], [24]. Eine umfassende Übersicht und Beschreibung der Funkenentladung und Meßmethoden der Strahlungsgrößen geben SCHARDIN und FÜNFER [28]. Die sehr verwickelten und bis heute noch nicht ganz geklärten physikalischen Vorgänge der Funkenentladung werden in den ausführlichen theoretischen Arbeiten von ROMPE und STEENBECK [22], RAETHER [23], FINKELNBURG [8], [9] und WEIZEL und ROMPE [26] behandelt. Diese theoretischen Grundlagen sind aber teilweise auf den Vorgang in einer Blitzlampe anwendbar.

Es sollen hier die Ergebnisse einiger Untersuchungen über den Betrieb und die Lichtausbeute von Blitzlampen mit hohen elektrischen Energien und hohen Spannungen mitgeteilt werden. Da in erster Linie die Wirkung auf den Film interessiert, wurde die Lichtausbeute photographisch bestimmt, während in anderen Untersuchungen gewöhnlich mit Hilfe einer Photozelle gemessen wird. Außerdem werden Angaben über die Herstellung von Blitzlampen gemacht.

Die elektrische Schaltung einer Blitzlampe ist sehr einfach. Eine Kondensatorenbatterie, deren Spannung unter der Selbstzündspannung der Blitzlampe liegt, wird durch einen Hochspannungsgleichrichter aufgeladen und ist mit kräftigen Kabeln dauernd mit den Elektroden der Blitzlampe verbunden. Die Zündung erfolgt durch einen Hochspannungsstoß über eine Außenbandelektrode. Das Schaltschema zeigt Abb. 1.

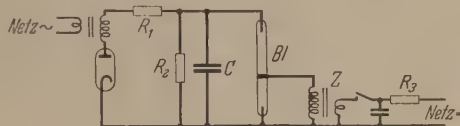


Abb. 1. Schaltschema für eine Blitzlampe.

Bl Blitzlampe; C Hochspannungskondensator; R1 und R2 Ladewiderstände; Z Zündspule (z. B. Bosch TK 6/3); R3 Ableitwiderstand zur Vermeidung von Überspannungen.

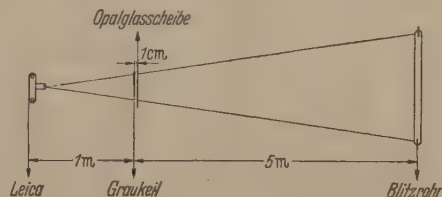


Abb. 2. Anordnung für Graukeilaufnahmen.

**2. Photographischer Lichtmengenvergleich.** Die Gesamtlichtmengen der einzelnen bei diesen Entladungen entstehenden Lichtblitze wurden photographisch verglichen, so daß man nur relative Werte für die Lichtausbeute erhält. Mit einer Leica wurde aus 1 m Entfernung ein Din-Sensitometer-Graukeil photographiert, der unter Zwischenschaltung einer Opalglasscheibe von der Rückseite her durch den Lichtblitz beleuchtet wurde (siehe Abb. 2). Als Filmmaterial wurden Adox KB 17 und Agfa Fluorapid-Film verwendet. Zur Vermeidung von Streulicht war diese Anordnung in einem lichtdichten Kasten untergebracht. Diese Methode ist durch Vergleiche mit Graukeilkopien eingehend nachkontrolliert worden. Es hat sich gezeigt, daß ein eventuell vorhandener Fehler gegenüber der sonst üblichen Kopie nicht größer als 1% sein kann. Um die Lichtmengen mehrerer Blitze miteinander vergleichen zu können, sucht man auf dem Film die Stufen gleicher



Schwärzung der entsprechenden Graukeilbilder. Da man die Transparenz der Graukeilstufen (im Original) kennt, so kennt man auch den Faktor, um den die Belichtung des einen Bildes größer als die des anderen ist. Dieser Faktor läßt sich auf  $\pm 3\%$  genau bestimmen, indem man das Graukeilbild auf dem Film

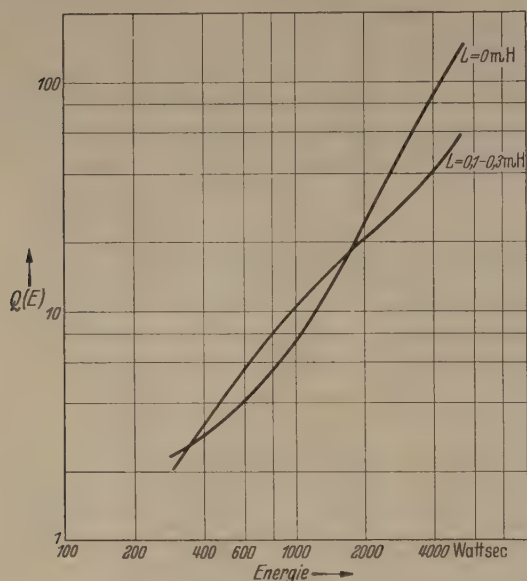


Abb. 3. Gesamtlichtmenge  $Q$  (relativ) in Abhängigkeit von der elektrischen Energie  $E$  bei konstanter Kapazität ( $7 \mu\text{F}$ ) mit und ohne Selbstinduktion im Entladungskreis.

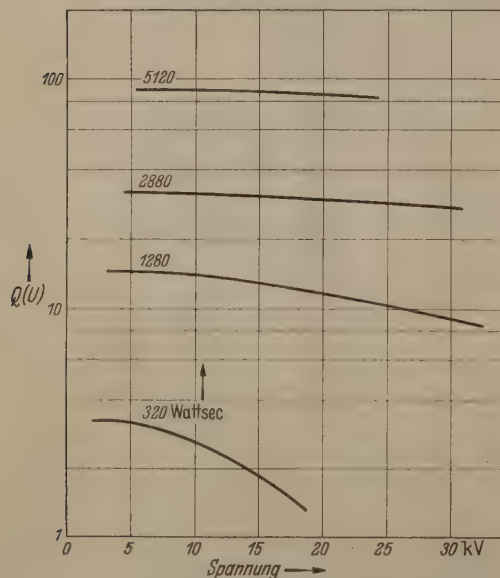


Abb. 4. Gesamtlichtmenge  $Q$  (relativ) in Abhängigkeit von der Spannung  $U$  bei konstanten Energien.

mit einem selbstgebauten Schwärzungsmesser photometriert, die Schwärzungskurven zeichnet und ihre Abstände in Abszissenrichtung in Stufeneinheiten mißt (vgl. die vorangehende Arbeit [27]).

Die Lichtausbeute von Blitzlampen in Abhängigkeit von den Parametern: Elektrische Energie, Spannung, Selbstinduktion und Gasdruck ist von verschiedenen Autoren gemessen worden (siehe z. B. ALDINGTON und MEADOWCROFT [1], KNOTT [14], WARMOLTZ [25], CARLSON und PRITCHARD [2] und EDGERTON und KILLIAN [3]). Derartige Messungen wurden hier wiederholt und darüber hinaus im Bereich hoher Energien und Spannungen ergänzt. Für diese Versuche wurde ein 80 cm langes Quarzrohr mit eingesetzten

Invarschliffen und Wolframelektroden benutzt, Quarz die hohe Belastung besser verträgt als Hartglas. Als Füllgas wurde Argon verwandt. Um bei gleichem Gasdruck in einem größeren Spannungsbereich arbeiten zu können, ist vielfach ein Ignitron (Typ AE 10/1000/1GL) als „Einschalter“ verwendet worden. Die Kondensatorspannung muß dabei oberhalb der Selbstzündspannung des Blitzrohrs liegen.

**3. Energieabhängigkeit der Gesamtlichtmenge.** Die einem Lichtblitz erzeugte Gesamtlichtmenge ist, wenn sonst konstant gehaltener Anordnung in erster Näherung der verbrauchten elektrischen Energie proportional. Bei genauerer Untersuchung stellt man Abweichungen von diesem proportionalen Verhalten fest: Abb. 3 zeigt in doppelt logarithmischer Darstellung die Abhängigkeit der Gesamtlichtmenge von der elektrischen Energie mit und ohne Selbstinduktion. Befindet sich eine Selbstinduktion im Entladungskreis, so erhält man bei Extrapolation zu kleinen Energien eine nicht genutzte konstante Restenergie. Bei Energien über 3000 Wattsec kann man eine Verbesserung der Lichtausbeute vermuten. Ohne äußere Selbstinduktion läßt sich dagegen eindeutig ein mehr proportionales Ansteigen der Gesamtlichtmenge mit der Energie (und zwar bei Energien  $E > 1000$  Watts) feststellen. Diese Ergebnisse zeigen, daß man immer dann eine höhere photographische Lichtausbeute erhält, wenn die Stromdichte und damit auch die Ionisation und der Gasdruck im Blitzrohr groß sind. In Gas nähert sich dann mehr dem Zustand eines thermischen Plasmas. Die im UV liegende Argon-Resonanzlinie wird vom äußeren Gasmantel absorbiert und als sichtbare Strahlung reemittiert. Die Elektronenbremsstrahlung und Rekombinationsstrahlung liefern ein kräftiges Kontinuum im Sichtbaren, und nur die sichtbare Licht ist praktisch photographisch nutzbar. Das Anwachsen der Lichtausbeute mit wachsender elektrischer Energie erwähnen auch CARLSON und PRITCHARD [2] und EDGERTON [5]. Auch SCHULZ [6] hat bei Edelhochdruckentladungen gefunden, daß die Intensität des Kontinuums mit einer Potenz (ca. 1,7) der Stromstärke anwächst. Er führt das auf eine mit zunehmender Stromstärke abnehmende „effektive“ Ionisierungsspannung zurück.

**4. Spannungsabhängigkeit der Gesamtlichtmenge.** Bei Veränderung der Spannung, aber konstanter elektrischer Energie (siehe Abb. 4) findet man, daß für kleine Energien bis 2000 Wattsec Spannungen über 10 kV ungünstig sind. Für Energien über 2000 Wattsec hängt die photographisch nutzbare Gesamtlichtmenge nicht so empfindlich von der Spannung ab, d. h. eine Erhöhung der Spannung ändert die Lichtausbeute nicht wesentlich.

**5. Einfluß der Selbstinduktion auf die Gesamtlichtmenge.** Eine Selbstinduktion im Stromkreis wirkt sich in erster Linie auf die Entladungszeit aus. Diese wird entsprechend  $T \sim \sqrt{LC}$  verlängert. Ohne zusätzliche Induktionsspule erhält man einen Entladungsstoß von etwa  $5 \cdot 10^{-5}$  sec. Mit Spule beträgt die Entladungszeit ca.  $10^{-3}$  sec. Die Entladung erfolgt dabei in Form einer gedämpften, aber nicht mehr aperiodischen Schwingung. Zur Bestimmung des zeitlichen Verlaufes des Lichtstroms dienten Oszillogramme, die mit einer Vakuumphotozelle und einem Kathodenstrahloszilloskop mit Verstärker aufgenommen wurden. Dabei ist darauf zu achten, daß die Photozelle nicht über-



ert wird und daß der Verstärker bis zu Frequenzen  $10^5$  Hz noch linear arbeitet. Eine Verlängerung Belichtungszeit bei gleicher Belichtung (= Belichtungsstärke  $\times$  Belichtungszeit) wirkt sich in dem Bereich photographisch günstig aus (Schwarzfeldeffekt). Andererseits ist ohne Selbstinduktion Energiedichte größer. Das hat — gerade bei den hohen Energien — eine Verbesserung der Lichtausbeute zur Folge, die die Verschlechterung durch Verzerrung der Entladungszeit noch um 40% übertrifft, Abb. 5 zeigt. Der Energieverlust durch den Ohm'schen Widerstand der Spule hält sich, je nach Blitzstromwiderstand, in den Grenzen von 1—10%. Leider wird durch das Arbeiten ohne Selbstinduktion die Lebensdauer eines Blitzrohrs wegen der großen Erwärmung stark herabgesetzt. Man wird daher zweckmäßigerweise stets eine kleine Selbstinduktionsspule verwenden.

#### 6. Wirkung des Gasdrucks auf die Gesamtlichtmenge.

Gesamtlichtmenge eines Lichtblitzes wächst mit dem Gasdruck im Entladungsrohr (ALDINGTON [1], ARMOLTZ [25], CARLSON [2]). Dieser ist jedoch durch Elektrodenabstand, Kondensatorspannung und Gas in ziemlich engen Grenzen festgelegt. Bei den Edelen steigt die photographisch wirksame Lichtausbeute mit wachsendem Atomgewicht, da die Ionisierungsspannung kleiner wird und die Energietermine tiefer unterhalb der Ionisierungsgrenze liegen. Man verwendet daher am besten Xenon.

#### 7. Der „Widerstand“ des Blitzrohrs.

Der „Widerstand“ des Blitzrohrs (definiert als das Verhältnis von Spannung und Strom) wurde mit Hilfe von Oszilloskopen aus der Dämpfung des Kreises berechnet. Er beträgt für ein 80 cm langes Rohr mit 10 mm Innendurchmesser je nach den Betriebsbedingungen 1—4,2  $\Omega$ . Den Widerstand der Verbindungskabel und der Drosselspule muß man möglichst klein dazugewinnen halten, damit der auf das Blitzrohr entfallende Leistungsanteil möglichst groß wird.

#### 8. Zur Herstellung von Blitzlampen.

Die Herstellung einer Blitzlampe, die im Dauerbetrieb zuverlässig funktionieren soll, erfordert eine sorgfältige Glasbläser- und Hochvakuumarbeit.

Für Energien bis 1000 Wattsec pro Meter Rohrlänge genügt Hartglas (z. B. Duran) mit Wolfram-elektroden ( $\varnothing = 1,5$  mm). Für die Rohrweite gibt es ein Optimum, welches dadurch gegeben ist, daß man einerseits die Energiedichte durch Verkleinerung des Rohrdurchmessers groß machen möchte und andererseits die Absorption der Resonanzlinie in den äußeren Glasschichten durch Vergrößerung des Durchmessers vergrößern will. Der allgemein verwendete innere Rohrdurchmesser beträgt etwa 10 mm.

Sind die Elektroden eingeschmolzen, so befreit man sie von ihrer Oxydschicht durch Elektrolyse in verdünnter (10%) Phosphorsäure (Elektrode als Kathode). Der entstandene weiße Belag löst sich wieder in warmer verdünnter Phosphorsäure. Mit Wasser und Alkohol wird gut nachgespült. Dann wird das Rohr in einem Ofen bis zum Transformationspunkt des Glases (bei Duran-Glas 534° C) erhitzt und zur Temperung innerhalb von etwa 12 Stunden langsam abgekühlt. Gleichzeitig ist das Rohr dauernd mit einer Hochvakuumpumpe verbunden.

Falls die Elektroden noch nicht mit Hochfrequenz entgast worden sind, läßt sich das leicht durch eine

kräftige Gasentladung erreichen. In 10—20 Torr Argon läßt man mit Vorwiderstand eine Gasentladung (0,5—1 Amp) brennen, bis die Anode gerade anfängt zu glühen. (Es ist zweckmäßig, an der Hochvakuumanlage neben dem teuren Xenon einen Vorratskolben mit billigem Glühlampenargon zu haben, das man auch zum Spülen und zur angenäherten Bestimmung der Zündspannung verwenden kann.) Nach dem Abpumpen des Argons wird der Prozeß mit der anderen Elektrode wiederholt. Schließlich wird das Rohr sauber evakuiert, mit reinstem Xenon gefüllt und abgeschmolzen. Verunreinigungen und Fremdgase würden eine erhöhte und nicht konstante Zündspannung zur Folge haben. Der erforderliche Gasdruck muß einmal für die gegebene Rohrlänge, den Querschnitt, die Gas-

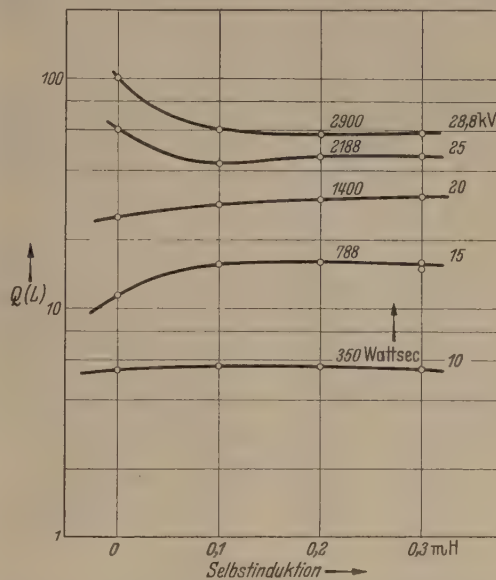


Abb. 5. Gesamtlichtmenge  $Q$  (relativ) in Abhängigkeit von der Selbstinduktion  $L$  im Entladungskreis für verschiedene Energien.

art und die Spannung bestimmt werden. Das kann noch an der Vakuumpumpe mit kleinen Kondensator-energien geschehen. Der Gasdruck beträgt bei einer Feldstärke von 100 V/cm etwa 200 Torr.

Für höhere Energien als 1000 Wattsec pro Meter Rohrlänge muß man Quarzrohr verwenden, da die Wand eines Glasrohrs durch die hohe thermische Belastung beschädigt wird und Gas abgibt. Die Wolfram-elektroden werden in Duran eingeschmolzen und unter Zwischenschaltung geeigneter Übergangsgläser an das Quarzrohr angesetzt. Für die hier beschriebenen Versuche mit hohen-Energien haben sich Quarzrohre mit Invarschliffkonus und eingesetzten Wolframstiften als Elektroden gut bewährt.

Herrn Prof. K. WIRTZ danke ich vielmals für die Anregung zu dieser Arbeit und für wertvolle Ratschläge während ihrer Durchführung. Auch Herrn U. PFEIFFER, der verschiedene Vorarbeiten zur Herstellung von Blitzlampen leistete, sei hier für viele Hinweise technischer Art gedankt.

#### Zusammenfassung.

Gasentladungs-Blitzlampen zur Beleuchtung von Wilsonkammern werden bei Energien bis 5000 Wattsec und bei Spannungen bis 30 kV auf ihre Lichtausbeute hin untersucht. Dabei wird die relative Gesamtlichtmenge photographisch nach der Graukeilmethode be-



stimmt. Die Lichtausbeute (Lumensec/Wattsec) steigt mit wachsender Energiedichte und ist nur wenig von der elektrischen Spannung abhängig. Die Herstellung einer Blitzlampe wird kurz beschrieben.

**Literatur.** [1] ALDINGTON, J. N. und A. J. MEADOWCROFT: J. Inst. El. Engrs. 95, 671 (1948). — [2] CARLSON, F. E. und D. A. PRITCHARD: Illum. Eng. 48, 235 (1947). — [3] EDGERTON, H. E. und J. R. KILLIAN: „Flash“. Hale, Cushman and Flint, Boston (1938). — [4] EDGERTON, H. E. und D. M. MURPHY: J. Appl. Phys. 12, 848 (1941). — [5] EDGERTON, H. E.: J. opt. Soc. Am. 36, 390 (1946). — [6] EDGERTON, H. E.: J. Soc. Mot. Pict. Engrs. 52, 7 (1949). — [7] EDGERTON, H. E. und R. S. CARLSON: J. Soc. Mot. Pict. Engrs. 55, 88 (1950). — [8] FINKELNBURG, W.: Einführung in die Atomphysik. Springer Berlin (1951). — [9] FINKELNBURG, W.: Kontinuierliche Spektren. Springer Berlin (1938). — [10] FÜNFER, E.: Z. angew. Phys. 1, 295 (1949). — [11] GÄNGER, B.: Arch. Elektrotechn. 39, 508 (1949). — [12] GLASER, G.: Optik 7, 33; 7, 61 (1950). — [13] GLASER, G.: Z. Naturforsch. 6a, 706 (1951). — [14] KNOTT,

G.: Photographie J., Sect. B 89, 46 (1949). — [15] LAPORTE, M.: J. de Physique 8, 248 u. 332 (1937). — [16] LAPORTE, M. C. R. 203, 1341 (1936); J. de Physique 9, 228 (1938). — [17] LAPORTE, M., R. LEGROS und J. ROUX: C. R. 226, 1265 (1948). — [18] LAPORTE, M. und J. TEILLAC: J. de Physique 9, 2 (1938). — [19] PORTER, G. und R. G. W. NORRISH: Proc. Roy. Soc. A 200, 284 (1949/50). — [20] PROJECTOR, T. und L. E. BARBROW: Rev. sci. Instruments 16, 51 (1945). — [21] RAETHER, H.: Ergebn. exakt. Naturwiss. 22, 73 (1949). — [22] ROMPE, R. und E. STEENBECK: Ergebn. exakt. Naturwiss. 18, 257 (1939). — [23] ROMPE, R. und P. SCHULZ: Phys. Z. 105 (1941). — [24] SCHULZ, P.: Ann. Physik 1, 95 (1947). — [25] WARMOLTZ, M. und A. M. C. HELMER: Philips Tech. Rundschau 10, 183 (1948). — [26] WEIZEL, W. und R. ROMPE: Theorie der elektrischen Lichtbögen und Funken. Bar. Leipzig (1949). — [27] ELSAESSER, M. S. und K. WIRTZ: angew. Phys. 5, 133 (1953). — [28] SCHARDIN, H. und E. FÜNFER: Z. angew. Phys. 4, 185; 4, 224 (1952).

Dipl. Phys. BERNHARD MEYER,  
Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen.

## Die Schlitzblende im Wellenleiter mit rechteckigem Querschnitt.

Von ROLF MÜLLER, München.

Mit 5 Textabbildungen.

(Eingegangen am 22. Oktober 1952.)

1.

In einer früheren Arbeit [1], die wir im folgenden mit I zitieren, wurde das Problem der Beugung einer  $H_{10}$ -Welle an einer symmetrischen Schlitzblende (elektrisches Feld parallel zur Schlitzkante) zurückgeführt auf eine FREDHOLMSche Integralgleichung erster Art:

$$-|B_{10}| \sin \varphi \cdot \sin x = \frac{2}{\pi} \int_{-\beta\pi/2}^{+\beta\pi/2} P(x-x') p(x') dx' \quad (1)$$

mit

$$P(x-x') = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \{(2\nu+1)(x-x')\}}{\sqrt{(2\nu+1)^2 - \kappa^2}}. \quad (2)$$

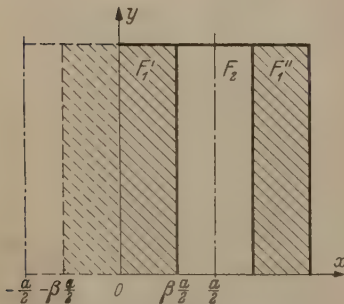


Abb. 1. Lage des Koordinatensystems in der Blendenebene, das der Integralgleichung (1) zugrunde liegt.  $F_1, F_2, F_3$  Blendenschirm;  $F_2$  Blendenöffnung.

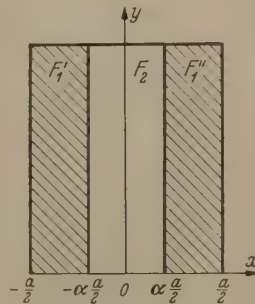


Abb. 2. Lage des Koordinatensystems, das der Integralgleichung (4) zugrunde liegt.

In den Gl. (1 u. 2) wurde, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich ist, gegenüber der Gl. (I, 69) die Rohrbreite  $a$  gleich  $\pi$  gesetzt und die Wellenzahl  $k$  durch den Frequenzparameter  $\kappa = \frac{ka}{\pi}$  ersetzt. Wir betrachten im folgenden die Integralgleichung (1) für den Fall, daß die  $H_{10}$ -Welle die einzige mögliche homogene Welle ihres Symmetrietyps ist, d. h. wie aus den Betrachtungen in I hervorgeht, daß  $\kappa$  auf dem Bereich  $1 < \kappa < 3$  beschränkt ist.  $B_{10}$  ist die Amplitude der einfallenden Welle  $\varphi$  der Phasenwinkel zwischen einfallender und reflektierter Welle. Der Parameter  $\beta$  stellt das Verhältnis Schirm-

breite zu Rohrbreite dar. Die Funktion  $p(x') = \frac{d\tilde{g}}{dx}$  ist wie aus den Betrachtungen in I hervorgeht, bis auf einen konstanten Faktor die Stromdichtebelegung am Blendenschirm. Die Lage des Koordinatensystems in der Blendenebene geht aus Abb. 1 hervor. Die Integralgleichung (1) eignet sich, wie aus der folgenden Untersuchung hervorgeht, besonders zur Behandlung von Blenden mit schmalen Schirmen (kleine Werte von  $\beta$ ).

Neben der Integralgleichung (1) läßt sich aus der Gl. (I, 55–57) wie im Anhang gezeigt wird, eine äquivalente Integralgleichung ableiten:

$$-|B_{01}| \sqrt{\kappa^2 - 1} \cdot \cos \varphi \sin x = \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha\pi/2}^{+\alpha\pi/2} \bar{P}(x-x') \bar{p}(x') dx' \quad (3)$$

mit

$$\bar{P}(x-x') = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(2\nu+1)^2 - \kappa^2}}{(2\nu+1)^2} \cos \{(2\nu+1)(x-x')\}.$$

Der Parameter  $\alpha = 1 - \beta$  stellt das Verhältnis Schlitzbreite zu Rohrbreite dar. Die Integralgleichung (4) ist im Gegensatz zu Integralgleichung (1) besonders zur Behandlung von Blenden mit schmalen Schlitzern d. h. für solche mit kleinen Werten von  $\alpha$  geeignet. Die Funktion  $\bar{p}(x')$  ist bis auf einen konstanten Faktor die Normalkomponente des Magnetfeldes im Spalt. Die Lage des Koordinatensystems in der Blendenebene, die gegenüber dem oben betrachteten Fall um  $\pi/2$  verschoben ist, geht aus Abb. 2 hervor.

Die Integralgleichungen (1) und (4) lassen sich transformieren, daß man sie mit Hilfe eines rasch konvergenten Rekursionsverfahrens für alle Werte von  $\alpha, \beta \leq 1/2$ , näherungsweise lösen kann. Die dazu notwendigen Umformungen werden im zweiten Abschnitt durchgeführt.



2.

Die Kerne  $P$  und  $\bar{P}$  der Integralgleichungen (1) und (4) lassen sich, wenn man der einfachen Schreibweise wegen an Stelle von  $x - x'$  die Variable  $z$  einsetzt, in der Form

$$= \frac{\cos 3z}{9 - \kappa^2} + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\cos (2\nu+1)z}{2\nu+1} \cdot \left\{ 1 - \left( \frac{\kappa}{2\nu+1} \right)^2 \right\}^{-1/2} \quad (5)$$

$$= \frac{-\kappa^2}{9 - \kappa^2} \cos 3z + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\cos (2\nu+1)z}{2\nu+1} \left\{ 1 - \left( \frac{\kappa}{2\nu+1} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (6)$$

schreiben. Da  $\kappa$  nach unserer obigen Voraussetzung kleiner als 3 ist, kann man unter den, in Gl. (5) und (6) vorkommenden Summen, die Wurzeln in guter Näherung durch eine binomische Entwicklung nach  $\frac{\kappa}{2\nu+1}$ , erhalten, die mit dem quadratischen Glied in  $\frac{\kappa}{2\nu+1}$  abhört. Die Kerne  $P(z)$  und  $\bar{P}(z)$  nehmen dann die Gestalt an:

$$= - \left( 1 + \frac{\kappa^2}{2} \right) \cos z + \lambda_1 \cos 3z + P_1(z) + \frac{\kappa^2}{2} P_3(z) \quad (7)$$

$$= - \left( 1 - \frac{\kappa^2}{2} \right) \cos z + \bar{\lambda}_1 \cos 3z + P_1(z) - \frac{\kappa^2}{2} P_3(z) \quad (8)$$

$$P_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos (2\nu+1)z}{(2\nu+1)^3}, \quad (9)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos (2\nu+1)z}{(2\nu+1)^3} = - \int_0^z \int_0^{\xi} P_1(\xi) d\xi d\xi + c'. \quad (10)$$

$$C = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^3} \quad (11)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{3} \left\{ \left( 1 - \left( \frac{\kappa}{3} \right)^2 \right)^{-1/2} - 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\kappa}{3} \right)^2 \right\}, \quad (12)$$

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{1}{3} \left\{ \left( 1 - \left( \frac{\kappa}{3} \right)^2 \right)^{1/2} - 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\kappa}{3} \right)^2 \right\}. \quad (13)$$

Die Funktionen  $p(x')$  und  $\bar{p}(x')$  sind im ganzen Grundgebiet  $-\pi/2 \leq x' \leq \pi/2$  definiert und lassen sich dort, wie aus I hervorgeht, durch FOURIERREIHEN:

$$p(x') = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} \sin (2\nu+1) x' \quad (14)$$
$$c_0 = |B_{10}| \sqrt{\kappa^2 - 1} \cdot \cos \varphi.$$

$$\bar{p}(x') = \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{c}_{\nu} \sin (2\nu+1) x' \quad (15)$$
$$\bar{c}_0 = |B_{10}| \sin \varphi$$

Die Koeffizienten, deren erster Koeffizient in der angegebenen Weise von der Amplitude  $|B_{01}|$  der einfallenden Welle

abhängt (s. Gl. I, 65). Da die Funktion  $p(x')$  im Schlitz, die Funktion  $\bar{p}(x')$  auf dem Blendenschirm verschwindet, gelten die Relationen:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_{-\beta\pi/2}^{\beta\pi/2} \cos \{(2\nu+1)(x-x')\} p(x') dx' \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \{(2\nu+1)(x-x')\} p(x') dx' \\ &= c_{\nu} \sin (2\nu+1) x \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

und ebenso

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha\pi/2}^{\alpha\pi/2} \cos \{(2\nu+1)(x-x')\} \bar{p}(x') \\ &= \bar{c}_{\nu} \sin (2\nu+1) x. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Setzt man die Gln. (7, 8) in die Integralgleichungen (1) und (4) ein, und macht von den Beziehungen (16, 17) Gebrauch, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \left\{ P_1(x-x') + \frac{\kappa^2}{2} P_3(x-x') \right\} p(x') dx' \\ &= \lambda_0 c_0 \sin x - \lambda_1 c_1 \sin 3x, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \int_{-\bar{\sigma}}^{\bar{\sigma}} \left\{ P_1(x-x') - \frac{\kappa^2}{2} P_3(x-x') \right\} \bar{p}(x') dx' \\ &= \bar{\lambda}_0 \bar{c}_0 \sin x - \bar{\lambda}_1 \bar{c}_1 \sin 3x \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

mit:

$$\sigma = \beta\pi/2; \quad \bar{\sigma} = \alpha\pi/2 \quad (20)$$

und:

$$\lambda_0 = 1 + \frac{\kappa^2}{2} - (\kappa^2 - 1)^{-1/2} \operatorname{tg} \varphi, \quad (21)$$

$$\bar{\lambda}_0 = 1 - \frac{\kappa^2}{2} - (\kappa^2 - 1)^{1/2} \operatorname{ctg} \varphi. \quad (22)$$

Die Integralgleichung (18) geht in die Integralgleichung (19) über, wenn man  $\kappa^2$  durch  $-\kappa^2$  und  $\sigma, c_{\nu}, \lambda_0, \lambda_1$  durch die gestrichelten Größen ersetzt. Wir können uns daher bei den folgenden Betrachtungen weitgehend auf die Behandlung der Integralgleichung (18) beschränken.

Der Kern  $P_1$  läßt sich in geschlossener Form darstellen [2]:

$$P_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos (2\nu+1)z}{2\nu+1} = -\frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} z/2|, \quad (23)$$

daraus gewinnt man, eine Entwicklung des Kerns  $P_1$  nach  $z$ :

$$\begin{aligned} P_1(z) &= -\frac{1}{2} \ln |z/2| - \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{tg} z/2}{z/2} \\ &= -\frac{1}{2} \ln z/2 - \frac{z^2}{4!} - \frac{7}{4! 5!} z^4 - \dots \end{aligned} \quad (24)$$

für  $|z| < \pi$ . Der Variationsbereich von  $|z|$  ist, wie aus den Gln. (18) und (19) hervorgeht,  $|z| \leq 2\sigma$  bzw.  $|z| \leq 2\bar{\sigma}$ . Beschränkt man den Variationsbereich der Parameter  $\sigma, \bar{\sigma}$  auf  $0 \leq \sigma, \bar{\sigma} \leq \pi/4$ , dann beschreibt die Gl. (18) die Beugung an Blenden mit Schlitzbreiten, die breiter, mindestens aber gleich der halben Rohrbreite sind, während die Gl. (19) die Beugung an Blenden beschreibt, deren Schlitzbreiten schmaler, höchstens gleich der halben Rohrbreite sind. Man kann somit, trotz der



angegebenen Beschränkung des Variationsbereichs von  $\sigma$  bzw.  $\bar{\sigma}$  mit beiden Gleichungen alle Schlitzbreiten erfassen. Der Betrag von  $z$  wird damit kleiner höchstens gleich  $\pi/2$  und man kann in guter Näherung die Potenzreihe in Gl. (24) mit dem quadratischen Glied abbrechen. Es ergibt sich damit näherungsweise für  $P_1(z)$ :

$$P_1(z) = -\frac{1}{2} \ln |z/2| - \frac{z^2}{4!}, \quad (25)$$

daraus folgt nach Gl. (10) für  $P_3(z)$ :

$$P_3(z) = C + \frac{z^2}{4} \ln |z/2| - \frac{3}{8} z^2, \quad (26)$$

wobei wir uns aus dem gleichen Grund wie oben auf das quadratische Glied in  $z$  beschränken konnten.

Die logarithmischen Glieder im Kern legen die Transformation nahe:

$$\frac{x}{\sigma} = \cos u, \quad \frac{x'}{\sigma} = \cos v. \quad (27)$$

Wegen der Antisymmetrie der Funktionen  $p(x')$  und  $\bar{p}(x')$  (vgl. Gln. (14), (15)) sind symmetrische Glieder in  $x'$  im Kern der Integralgleichungen (18) und (19) bedeutungslos. Wir können daher mit den Gln. (25 u. 26), im Hinblick auf die später auszuführende Transformation Gl. (27) den Kern der Integralgleichung (18) in der Form schreiben:

$$P_1 + \frac{\kappa^2}{2} P_3 = -\frac{1}{2} \ln 2 \left| \frac{x-x'}{\sigma} \right| + \frac{\sigma^2}{12} \frac{x}{\sigma} \frac{x'}{\sigma} + \frac{(\kappa\sigma)^2}{8} \left\{ \left( \frac{x-x'}{\sigma} \right)^2 \ln 2 \left| \frac{x-x'}{\sigma} \right| + \frac{x}{\sigma} \frac{x'}{\sigma} (2 \ln 4/\sigma + 3) \right\} + S(x, x'); \quad (28)$$

der Kern der Integralgleichung (19) folgt daraus, wenn man  $\kappa^2$  durch  $-\kappa^2$  und  $\sigma$  durch  $\bar{\sigma}$  ersetzt.

$S(x, x')$  ist eine symmetrische Funktion in  $x'$  und daher für die weiteren Betrachtungen bedeutungslos. Nun ist bekanntlich [3]

$$-\frac{1}{2} \ln 2 |\cos u - \cos v| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu u \cos \nu v}{\nu} \quad (29)$$

und wie eine einfache Rechnung zeigt:

$$\left. \begin{aligned} 2(\cos u - \cos v)^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos \nu u \cos \nu v}{\nu} &= -\frac{1}{2} \\ &- \frac{3}{4} \cos 2v - \frac{3}{4} \cos 2u + \frac{5}{2} \cos u \cos v \\ &+ \sum_{\nu=3}^{\infty} \frac{\cos(\nu-2)u \cos \nu v}{(\nu-2)(\nu-1)\nu} - 2 \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\cos \nu u \cos \nu v}{(\nu-1)\nu(\nu+1)} \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos(\nu+2)u \cos \nu v}{\nu(\nu+1)(\nu+2)}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Die drei ersten Glieder auf der rechten Seite der Gl. (30) entsprechen einer symmetrischen Funktion in  $x'$  ebenso alle Summenglieder mit geradem  $\nu$ .

Der Kern der Integralgleichung (18) geht also durch die Transformation Gl. (27), wenn man die bedeutungslosen symmetrischen Glieder wegläßt, über in:

$$P_1(x-x') + \frac{\kappa^2}{2} P_3(x-x') = P_0(u, v) + P_1(u, v) \quad (31)$$

mit:

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= \alpha \cos u \cos v \\ &+ \sum_{\nu=3}^{\infty} \left( \frac{1}{\nu} + \frac{(\kappa\sigma)^2}{4(\nu-1)\nu(\nu+1)} \right) \cos \nu u \cos \nu v \\ &- \frac{(\kappa\sigma)^2}{8} \sum_{\nu=3}^{\infty} \frac{\cos(\nu-2)u \cos \nu v}{(\nu-2)(\nu-1)\nu}, \\ \alpha &= 1 + \frac{\sigma^2}{12} + \left( \frac{\kappa\sigma}{4} \right)^2 \left( 1 + 4 \ln \frac{4}{\sigma} \right), \\ P_1 &= -\frac{(\kappa\sigma)^2}{8} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos(\nu+2)u \cos \nu v}{\nu(\nu+1)(\nu+2)} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

in den Summen der Gln. (32 u. 34) durchläuft  $\nu$  die ungeraden Zahlen.

Durch die Transformation Gl. (27) geht die Funktion  $p(x')$  über in eine Funktion von  $v$  die wir mit  $s$  bezeichnen wollen. Das Differential  $dx$  geht über

$$dx = -\sigma \sin v dv. \quad (33)$$

setzt man:

$$\sigma s(v) \sin v = r(v), \quad (34)$$

so kann man an Stelle der Integralgleichung (18) schreiben:

$$\int_0^\pi \{P_0(u, v) + P_1(u, v)\} r(v) dv = c_0 \lambda_0 \sin(\sigma \cos u) - c_1 \lambda_1 \sin(3\sigma \cos u). \quad (35)$$

Aus der bekannten Integraldarstellung für BESSELFUNKTIONEN [4]

$$2 I_{2\nu+1}(t) = (-1)^\nu \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(t \cos u) \cos(2\nu+1)u du \quad (36)$$

folgt:

$$\sin(t \cos u) = 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu I_{2\nu+1}(t) \cos(2\nu+1)u \quad (37)$$

Damit erhält man schließlich aus Gl. (37):

$$\int_0^\pi \{P_0(u, v) + P_1(u, v)\} r(v) dv = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \cos(2\nu+1)u \quad (38)$$

mit:

$$A_\nu = (-1)^\nu 2 \{c_0 \lambda_0 I_{2\nu+1}(\sigma) - c_1 \lambda_1 I_{2\nu+1}(3\sigma)\}. \quad (39)$$

Da die BESSELFUNKTIONEN bei festem Argument mit wachsender Ordnungszahl sehr rasch gegen Null gehen ist selbst für den Maximalwert von  $\sigma$  ( $\sigma_{\max} = \pi/4$ ) das vierte Glied der in Gl. (40) auftretenden FOURIERENTWICKLUNG praktisch vernachlässigbar<sup>1</sup>.

Mit der Gl. (40) haben wir unsere ursprüngliche Integralgleichung (18) auf eine Form gebracht, die, im nächsten Abschnitt gezeigt wird, ein rasch konvergierendes Iterationsverfahren ermöglicht. Das gilt für die entsprechend transformierte Integralgleichung (19), die man aus Gl. (40) erhält, wenn man in  $P_0$  und  $P_1$   $\kappa^2$  durch  $-\kappa^2$  und  $\sigma$  durch  $\bar{\sigma}$ , in  $r$  durch  $\bar{r}$  und  $\sigma$  durch  $\bar{\sigma}$ , und in den Koeffizienten  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  und  $\sigma$  durch die gestrichelten Größen setzt.

<sup>1</sup>  $I_7(\pi/4) < 10^{-6}$ ,  $I_7\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 10^{-3}$ .



### 3.

Die Struktur der Kerne  $P_0$  und  $P_1$  in Gl. (40) legt nahe, die Funktion  $r(v)$  aus (linear unabhängigen) Funktionen aufzubauen, die abbrechende FOURIER- von höchstens drei Gliedern sind:

$$r(v) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(v) \quad (42)$$

$$\begin{aligned} &= R_{00} \cos v \\ &= R_{10} \cos v + R_{11} \cos 3v \\ &= R_{n,n-2} \cos(2n-3)v + R_{n,n-1} \cos(2n-1)v \\ &\quad + R_{nn} \cos(2n+1)v \text{ für } n > 1. \end{aligned} \quad (43)$$

Wählt man abkürzend zur Bezeichnung der Integrale  $\int_0^{\pi/2} (u, v) r(v) dv$  die Symbole  $(Pr)$  ein, so entsteht mit Gl. (42) aus der Integralgleichung (40) das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} r_0 &= A_0 \cos u \\ r_n &= A_n \cos(2n+1)u - (P_1 r_{n-1}) \text{ für } n > 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Aus der ersten Gl. (40) folgt:

$$R_{00} = \frac{A_0}{\alpha} \quad (45)$$

Für  $n=1$  folgt aus der zweiten Gl. (44) durch Koeffizientenvergleich:

$$R_{11} = \frac{3A_1 + \left(\frac{\kappa\sigma}{4}\right)^2 R_{00}}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa\sigma}{4}\right)^2}, \quad R_{10} = \frac{1}{3\alpha} \left(\frac{\kappa\sigma}{4}\right)^2 R_{11}. \quad (46)$$

Für  $n=2$  folgt aus der zweiten Gl. (44) durch Koeffizientenvergleich:

$$\left. \begin{aligned} R_{22} &= \frac{5A_2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\kappa\sigma}{4}\right)^2 R_{11}}{1 + \frac{1}{6} \left(\frac{\kappa\sigma}{4}\right)^2}; \\ R_{20} &= \frac{\left(\frac{\kappa\sigma}{4}\right)^2 R_{10} + \frac{1}{6} R_{22}}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa\sigma}{4}\right)^2}; \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

mit sind die Teilfunktionen  $r_0$ ,  $r_1$  und  $r_2$  bestimmt. Analogher Weise ließen sich die weiteren Teilfunktionen  $r_n$  bestimmen. Da wir jedoch bei unseren obigen Annahmen die Entwicklung des Kerns mit quadratischen Gliedern in  $\frac{\kappa\sigma}{2\nu+1}$  mit  $\nu \geq 2$  abgebrochen haben, ist es nicht sinnvoll, die Entwicklung der Koeffizienten  $R_n$  weiter als bis zu quadratischen Gliedern in  $\frac{\kappa\sigma}{4}$  zu geben. Beachtet man weiter die rasche Konvergenz der Koeffizienten  $A_n$ , so folgt aus den Gln. (45–47) in der hier betrachteten Näherung:

$$\left. \begin{aligned} R_{00} &= \frac{A_0}{\alpha}, \quad R_{11} = 3A_1 + \left(\frac{\kappa\sigma}{4}\right)^2 \left(\frac{A_0}{\alpha} - \frac{3}{2}A_1\right), \\ R_{22} &= \left(\frac{\kappa\sigma}{4}\right)^2 \frac{A_1}{\alpha}, \quad R_{22} = 5A_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa\sigma}{4}\right)^2 A_1. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Die Koeffizienten  $R_{21}$  und erst recht  $R_{20}$  kann in der betrachteten Näherung vernachlässigt werden, ebenso die höheren Koeffizienten  $R_{mn}$ . Es ergibt sich somit

als Näherungslösung der Integralgleichung (40):

$$\left. \begin{aligned} r(v) &= \frac{1}{\alpha} \left( A_0 + \left(\frac{\kappa\sigma}{4}\right)^2 A_1 \right) \cos v \\ &+ \frac{1}{\alpha} \left\{ 3\alpha A_1 + \left(\frac{\kappa\sigma}{4}\right)^2 \left( A_0 - \frac{3\alpha}{2} A_1 \right) \right\} \cos 3v \\ &+ \left( 5A_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa\sigma}{4}\right)^2 A_1 \right) \cos 5v. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

### 4.

Die Koeffizienten  $A_\nu$  hängen, wie aus der Gl. (41) hervorgeht, von den Koeffizienten  $c_0$  und  $c_1$  ab. Wir müssen sie noch aus der Gl. (49) für  $r(v)$  eliminieren. Da die Funktion  $p(x')$  im Schlitz verschwindet, ist:

$$\left. \begin{aligned} c_\nu &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin(2\nu+1)x' p(x') dx' \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\beta\pi/2}^{\beta\pi/2} \sin(2\nu+1)x' p(x') dx' \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin\{(2\nu+1)\sigma \cos v\} r(v) dv. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Daraus folgt mit Gl. (49) und unter Beachtung der schon oben benutzten Integraldarstellung für BESSELFunktionen Gl. (38):

$$\left. \begin{aligned} c_\nu &= \frac{2}{\alpha} \left\{ A_0 + \left(\frac{\kappa\sigma}{4}\right)^2 A_1 \right\} I_1(2\nu+1)\sigma \\ &- \frac{2}{\alpha} \left\{ 3\alpha A_1 + \left(\frac{\kappa\sigma}{4}\right)^2 \left( A_0 - \frac{3\alpha}{2} A_1 \right) \right\} I_3(2\nu+1)\sigma \\ &+ \left\{ 10A_2 + \left(\frac{\kappa\sigma}{4}\right)^2 A_1 \right\} I_5(2\nu+1)\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Mit  $\nu=0$  und  $\nu=1$  erhält man aus Gl. (51) ein homogenes Gleichungssystem für  $c_0$  und  $c_1$ . Wegen der raschen Konvergenz der BESSELFunktionen mit wachsender Ordnungszahl (für den Maximalwert von  $\sigma$  ist  $I_3(\sigma) \approx 0,01$ ;  $I_5(\sigma) \approx 10^{-4}$ ;  $I_5(3\sigma) \approx 0,02$ ) braucht man zur Bestimmung von  $c_0$  und  $c_1$  den letzten Term in Gl. (51) nicht zu berücksichtigen, da beide Faktoren dieses Terms sehr kleine Größen sind. Setzt man in die so vereinfachte Gl. (51) die durch die Gl. (41) gegebenen Werte der Koeffizienten  $A_\nu$  ein und vernachlässigt alle Glieder die proportional zu  $(I_3(\sigma))^2$  oder zu  $\left(\frac{\kappa\sigma}{4}\right)^2 \cdot I_3(\sigma)$  sind, so erhält man das Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} c_0(A_{11} - \lambda_0) + c_1 A_{12} &= 0, \\ c_0 \lambda_0 A_{21} + c_1 A_{22} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

mit:

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \frac{\alpha}{4 \cdot (I_1(\sigma))^2}; \quad A_{12} = \lambda_1 \frac{I_1(3\sigma)}{I_1(\sigma)} \\ &\left\{ 1 - \left(\frac{\kappa\sigma}{4}\right)^2 \frac{I_3(3\sigma)}{I_1(3\sigma)} + 3\alpha \frac{I_3(\sigma) \cdot I_3(3\sigma)}{I_1(\sigma) I_1(3\sigma)} \right\}, \\ A_{21} &= \frac{I_1(3\sigma)}{I_1(\sigma)} \\ &\left\{ 1 - \left(\frac{\kappa\sigma}{4}\right)^2 \frac{I_3(3\sigma)}{I_1(3\sigma)} + 3\alpha \frac{I_3(3\sigma) I_3(\sigma)}{I_1(\sigma) I_1(3\sigma)} \right\} \\ A_{22} &= \frac{\alpha}{4 (I_1(\sigma))^2} + \lambda_1 \left( \frac{I_1(3\sigma)}{I_1(\sigma)} \right)^2 \\ &\left\{ 1 - 2 \left(\frac{\kappa\sigma}{4}\right)^2 \frac{I_3(3\sigma)}{I_1(3\sigma)} + 3\alpha \left( \frac{I_3(3\sigma)}{I_1(3\sigma)} \right)^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa\sigma}{4}\right)^2 \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$



Die Konstante  $\lambda_0$  hängt, wie aus Gl. (21) hervorgeht, von dem Phasenwinkel  $\varphi$  ab. Dieser Phasenwinkel ist durch die Lösbarkeitsbedingung des homogenen Gleichungssystems Gln. (52) bestimmt. Da die Blende als Schaltelement durch den Phasenwinkel  $\varphi$  bzw. durch das Reflexionsvermögen  $R = -\cos \varphi$  vollständig beschrieben wird, wollen wir uns darauf beschränken,  $\varphi$  als Funktion von  $\kappa$  und  $\sigma$  zu bestimmen. Setzt man die Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems Gl. (52) gleich Null, so erhält man:

$$\lambda_0 = \frac{A_{11} \cdot A_{22}}{A_{22} + A_{12} A_{21}}. \quad (54)$$

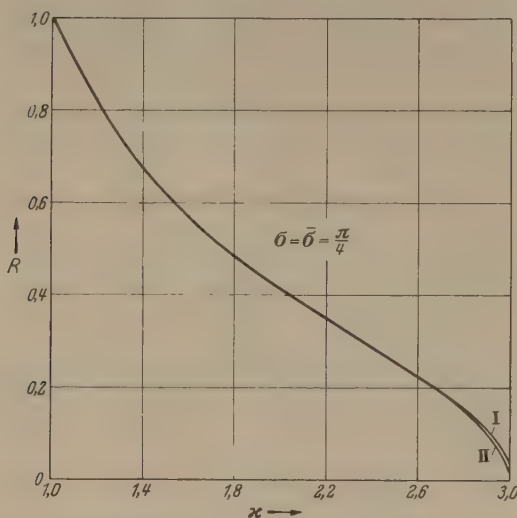


Abb. 3. Reflexionsvermögen  $R = -\cos \varphi$  einer Blende mit  $\alpha = \beta = 1/2$  in Abhängigkeit von der red. Wellenzahl  $\kappa = \frac{\pi a}{\lambda}$ . Bis  $\kappa = 2,6$  fallen die aus Gl. (57) (Näherung für  $\beta = (1 - \alpha) \leq 1/2$ , Kurve I), und die aus Gl. (58) (Näherung für  $\alpha \leq 1/2$ , Kurve II) gewonnenen Werte innerhalb dieser Zeichengenauigkeit zusammen.

Setzt man darin die  $A_{ik}$  aus Gl. (53) und die Konstante  $\alpha$  aus Gl. (33) ein und berücksichtigt wie oben nur quadratische Glieder in  $\frac{\kappa \sigma}{4}$ , so erhält man:

$$\lambda_0 = \frac{a(\sigma) + b(\sigma) \left(\frac{\kappa \sigma}{4}\right)^2 + \lambda_1 \left\{ c(\sigma) - \left(\frac{\kappa \sigma}{4}\right)^2 d(\sigma) \right\}}{1 + \lambda_1 \left\{ c(\sigma) - \left(\frac{\kappa \sigma}{4}\right)^2 f(\sigma) \right\}} \quad (55)$$

mit:

$$\left. \begin{aligned} a(\sigma) &= \frac{12 + \sigma^2}{48 (I_1(\sigma))^2}; & b(\sigma) &= \frac{1 + 4 \ln 4/\sigma}{4 (I_1(\sigma))^3}, \\ c(\sigma) &= \left(\frac{I_1(3\sigma)}{I_1(\sigma)}\right)^2 + \left(3 + \frac{\sigma^2}{4}\right) \left(\frac{I_3(3\sigma)}{I_1(\sigma)}\right)^2; \\ d(\sigma) &= \frac{I_3(3\sigma)}{I_1(\sigma)} \left\{ 2 \frac{I_1(3\sigma)}{I_1(\sigma)} - 3 \frac{I_3(3\sigma)}{I_1(\sigma)} (4 \ln 4/\sigma + 1/2) \right\}, \\ e(\sigma) &= 12 (I_3(3\sigma))^2 - 24 I_1(3\sigma) I_3(3\sigma) \cdot \frac{I_3(\sigma)}{I_1(\sigma)}; \\ f(\sigma) &= 6 (I_3(3\sigma))^2. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Aus Gl. (55) erhält man die entsprechende Beziehung für  $\bar{\lambda}_1$ , indem man  $\kappa^2$  durch  $-\kappa^2$  und  $\sigma, \lambda_1$  durch  $\bar{\sigma}, \bar{\lambda}_1$  ersetzt. Setzt man nun die Ausdrücke für  $\lambda_0$  und  $\bar{\lambda}_0$  aus den Gln. (21 u. 22) in die Gl. (55) bzw. in die daraus folgende Beziehung für  $\bar{\lambda}_0$  ein, so erhält man:

$$-\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\kappa^2 - 1} \times \left( \frac{a(\sigma) + \left(\frac{\kappa \sigma}{4}\right)^2 b(\sigma) + \lambda_1 \left\{ c(\sigma) - \left(\frac{\kappa \sigma}{4}\right)^2 d(\sigma) \right\}}{1 + \lambda_1 \left\{ c(\sigma) - \left(\frac{\kappa \sigma}{4}\right)^2 f(\sigma) \right\}} - 1 - \frac{\kappa^2}{2} \right) \quad (57)$$

$$-\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 - 1}}$$

Die Gl. (57) und (58) gelten für  $\sigma, \bar{\sigma} \leq \pi/4$ , und zwar schreibt die Gl. (57) den Phasenwinkel  $\varphi$  als Funktion von  $\kappa$  und  $\sigma$  für Blenden, deren Schlitzbreiten höchstens gleich der halben Rohrbreite sind, die Gl. (58) Blenden, deren Schlitzbreiten höchstens gleich der halben Rohrbreite sind. Der Phasenwinkel  $\varphi$  ist aus beiden Gleichungen für alle Werte des Verhältnisses Schlitzbreite zu Rohrbreite als Funktion von  $\sigma$  bestimmt. Für den Grenzfall  $\sigma = \bar{\sigma} = \pi/4$  beschreiben beide Gleichungen die Verhältnisse an einer Blende, deren Schlitzbreite gleich der halben Rohrbreite ist, und man hat durch den Vergleich der von weiten Schlitzbreiten herkommenden Näherung Gl. (57) und von schmalen Schlitzbreiten herkommenden Näherung Gl. (58) die Möglichkeit, die Güte des Näherungsverfahrens zu prüfen. Für die Koeffizienten  $a-f$  erhält man für  $\sigma = \pi/4$ :

$$\left. \begin{aligned} a(\sigma) &= 2,00, & c(\sigma) &= 2,99, \\ \left(\frac{\sigma}{4}\right)^2 b(\sigma) &= 0,55, & \left(\frac{\sigma}{4}\right)^2 d(\sigma) &= -0,17, \\ & & e(\sigma) &= 0,37, \\ & & \left(\frac{\sigma}{4}\right)^2 f(\sigma) &= 0,0084. \end{aligned} \right\}$$

Berechnet man damit nach Gl. (57) und (58) das Reflexionsvermögen  $R = -\cos \varphi$ , so erhält man die in Abb. 3 eingezeichneten Werte. Die beiden Näherungen stimmen ausgezeichnet überein. Die Abweichung liegt bis  $\kappa = 2,6$  unterhalb der Zeichengenauigkeit. Von  $\kappa = 2,6$  bis 3 gibt die Kurve I die aus Gl. (57) folgenden Werte, die Kurve II die aus Gl. (58) folgenden Werte.

Ist  $\sigma$  sehr klein gegen eins, so vereinfachen sich die Ausdrücke für  $(a-f)$  sehr erheblich:

$$a(\sigma) = \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{12}; \quad b(\sigma) = \frac{1 + 4 \ln 4/\sigma}{\sigma^2}; \quad c(\sigma) = 9$$

Die Koeffizienten  $d, e$  und  $f$  sind quadratisch oder höherer Ordnung in  $\sigma$  und können vernachlässigt werden. Ersetzt man  $\sigma$  durch  $\frac{\beta \pi}{2}$  bzw.  $\bar{\sigma}$  durch Gl. (20), so erhält man für Blenden mit sehr schmalen Blendenschirmen ( $\beta \ll 1$ ):

$$-\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{\kappa^2 - 1}}{\beta^2} \times$$

$$\left[ \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \beta^2 \left[ 9 \bar{\lambda}_1 - \frac{11}{12} + \frac{\kappa^2}{4} \left( \ln \frac{8}{\beta \pi} - \frac{7}{4} \right) \right] \right]$$

für Blenden mit sehr schmalen Schlitzbreiten ( $\alpha \ll 1$ ):

$$-\operatorname{tg} \varphi = \alpha^2 \sqrt{\kappa^2 - 1} \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \times \left[ 1 - \alpha^2 \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \left[ 9 \bar{\lambda}_1 - \frac{11}{12} - \frac{\kappa^2}{4} \left( \ln \frac{8}{\alpha \pi} - \frac{7}{4} \right) \right] \right].$$



Da die Funktionen  $\lambda_1, \bar{\lambda}_1$  deren Verlauf in Abb. 4 dergegeben ist im ersten Drittel des Variationsbereiches von  $\kappa$  sehr kleine Werte annehmen, vereinigen sich die Gl. (57) und (58) auch für hinreichend kleine Werte von  $\kappa$  sehr wesentlich:

$$- \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\kappa^2 - 1} \\ r) - 1 + \left( b(\sigma) \left( \frac{\sigma}{4} \right)^2 - \frac{1}{2} \right) \kappa^2 + \lambda_1 \left( \frac{I_1(3\sigma)}{I_1(\sigma)} \right)^2 \quad (63)$$

$$\text{für } \sigma \leq \frac{\pi}{4};$$

$$- \operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} \\ \bar{r}) - 1 - \left( b(\sigma) \left( \frac{\bar{\sigma}}{4} \right)^2 - \frac{1}{2} \right) \kappa^2 + \bar{\lambda}_1 \left( \frac{I_1(3\bar{\sigma})}{I_1(\bar{\sigma})} \right)^2 \quad (64)$$

$$\text{für } \bar{\sigma} \leq \frac{\pi}{4}.$$

Gl. (63) und (64) sind bis etwa  $\kappa \leq 1,7$  brauchbar. Sie beschreiben für diesen Bereich der Wellenzahl die Abhängigkeit des Phasenwinkels  $\varphi$  von der Schlitzweite. In Abb. 5 ist das Reflexionsvermögen  $R = \cos \varphi$  in Abhängigkeit von dem Verhältnis Schlitzweite zu Rohrbreite ( $\alpha$ ) aufgetragen, wie es sich aus Gl. (63) und (64) für  $\kappa = 1,6$  ergibt.

#### Anhang.

Ableitung der Integralgleichung

Gl. (4) aus den Gl. (I, 55—I, 57).

Die Funktion  $g$  Gl. (I, 56a) ist nach den Ausführungen in I zweimal differenzierbar. Es folgt daher aus Gl. (I, 55), wenn man wie oben  $a = \pi$  setzt:

$$x) - B_{01} \sin x = 0 \quad \text{für } \alpha \frac{\pi}{2} \leq |x| \leq \frac{\pi}{2}. \quad (A1)$$

zeichnet man die FOURIERKoeffizienten von  $g''$  mit  $b_\nu$ , so folgt mit den dortigen Bezeichnungen aus Gl. (I, 56a):

$$b_\nu'' = -(2\nu + 1)^2 b_\nu. \quad (A2)$$

FOURIERKoeffizienten von  $\tilde{g}$ , die wir mit  $\tilde{b}_\nu$  bezeichnen wollen, sind nach den Gl. (I, 56; 57; 65):

$$= i b_0 \sqrt{\kappa^2 - 1} = |B_{10}| \cos \varphi \sqrt{\kappa^2 - 1}; \\ \tilde{b}_\nu = -\sqrt{(2\nu + 1)^2 - \kappa^2} b_\nu \quad \nu > 0. \quad (A3)$$

gilt also die Integralbeziehung:

$$- \tilde{b}_0 \sin x = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \bar{P}(x - x') g''(x') dx', \quad (A4)$$

$$x - x') = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(2\nu + 1)^2 - \kappa^2}}{(2\nu + 1)^2} \cos \{(2\nu + 1)(x - x')\}. \quad (A5)$$

Stelle der Gl. (A4) kann man schreiben:

$$- \tilde{b}_0 \sin x = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \bar{P}(x - x') \{g''(x') - B_{01} \sin x'\} dx', \quad (A6)$$

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \bar{P}(x - x') \sin x' dx' = 0 \quad (A7)$$

ist. Führt man die Bezeichnung:

$$\bar{p}(x') = g''(x') - B_{10} \sin x \quad (A8)$$

ein, und beschränkt den Variationsbereich von  $x$  und  $x'$  in Gl. (A6) auf  $-\alpha \frac{\pi}{2} \leq x, x' \leq \alpha \frac{\pi}{2}$  und beachtet, daß  $\tilde{g}(x)$  nach Gl. (I, 55) in diesem Bereich verschwindet, während  $\bar{p}(x')$  nach Gl. (A1) in dem kom-

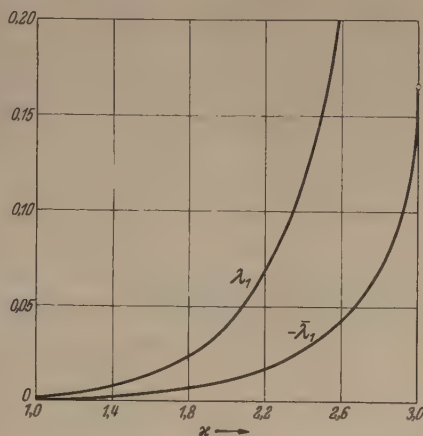


Abb. 4. Verlauf der Funktionen  $\lambda_1(\kappa)$  und  $\bar{\lambda}_1(\kappa)$ .

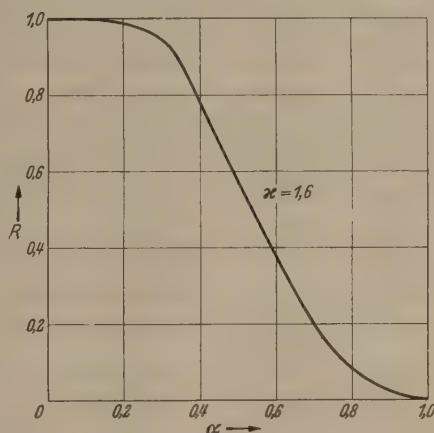


Abb. 5. Reflexionsvermögen  $R = -\cos \varphi$  der Schlitzblende in Abhängigkeit von dem Verhältnis Schlitzbreite zu Rohrbreite ( $\alpha$ ) für  $\kappa = \frac{k a}{\pi} = 1,6$ .

plementären Bereich Null wird, so erkennt man, daß sich unter Beachtung der ersten Gl. (A3) die Gl. (A5) in der Form:

$$- |B_{10}| \sqrt{\kappa^2 - 1} \cdot \cos \varphi = \int_{-\alpha \pi/2}^{+\alpha \pi/2} \bar{P}(x - x') \bar{p}(x') dx' \quad (A9)$$

schreiben läßt. Damit ist die Integralgleichung (4) gewonnen.

#### Zusammenfassung.

In der vorliegenden Abhandlung wird das Reflexionsvermögen einer symmetrischen Schlitzblende in rechteckigen Rohren für eine einfallende  $H_{10}$ -Welle als Funktion der Wellenzahl und der Schlitzbreite berechnet. Durch das Reflexionsvermögen ist die Blende als Schaltelement vollständig charakterisiert. Den Ausgangspunkt bildet eine FREDHOLMSche Integralgleichung erster Art, auf die in einer früheren Arbeit (I) das Problem der Beugung von  $H_{10}$ -Wellen an symmetrischen Schlitzblenden zurückgeführt wurde.

Im ersten Abschnitt wird neben der genannten Integralgleichung Gl. (1), die sich besonders für die Be-



handlung von Blenden mit schmalen Schirmen eignet, eine äquivalente Integralgleichung Gl. (4) angegeben, die dem entgegengesetzten Fall kleiner Schlitzes besonders angepaßt ist. Im zweiten Abschnitt werden die beiden Integralgleichungen so transformiert, daß man sie mit Hilfe eines rasch konvergenten Rekursionsverfahrens lösen kann. Im dritten Abschnitt wird dieses Rekursionsverfahren beschrieben, im vierten Abschnitt schließlich wird das Reflexionsvermögen der Blende für alle Werte der Schlitzbreite als Funktion der Wellenzahl und Schlitzbreite angegeben. Weiter wird gezeigt, daß das den Blenden mit schmalen Schlitzten und das den Blenden mit schmalen Schirmen

angepaßte Lösungsverfahren schon in der im Text betrachteten Näherung für eine Blende, deren Schlitzbreite gleich der Schirmbreite ist, praktisch übereinstimmende Werte für das Reflexionsvermögen liefert. Abweichungen machen sich, wie aus Abb. 1 hervorgeht, erst bei Wellenzahlen bemerkbar, die der Nähe der Grenzwellenzahl der  $H_{20}$ -Welle ( $\lambda =$

- Literatur.** [1] MÜLLER, R.: Z. angew. Phys. 4, 424 (1952).  
[2] KNOPP, K.: Unendliche Reihen. Springer 1931, S. 390.  
[3] HAMEL, G.: Integralgleichungen. Springer 1937, S. 96.  
[4] JAHNKE-EMDE: Tafeln höherer Funktionen.

Dozent Dr. ROLF MÜLLER, München 13, Adelheidstr. 10.

## Berichte.

### Elektrische Übertragungsmittel für Regel- und Steuergrößen bei mechanischer Rückführung.

Von RUDOLF STENZEL, Berlin-Charlottenburg \*.

Mit 15 Textabbildungen.

(Eingegangen am 13. November 1952.)

Bauformen und Übertragungsmittel elektrischer Regler (vorzugsweise Lagerregler) und Steuerungen werden an Hand von Prinzipschaltbildern beschrieben, ihre Verwendung in elektrischen Regeleinrichtungen bzw. Steuerungen wird umrissen, Hinweise auf ihre Brauchbarkeit in der Steuerungs- und Regeltechnik werden gegeben, speziell für Regelzwecke entwickelte Drehmelder, Koordinatenwandler, Ferrarismotoren, Magnetische (Drossel-) Verstärker und Drossel-Generator-Verstärker werden experimentell und rechnerisch untersucht.

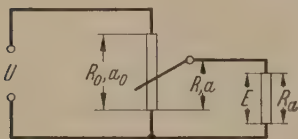


Abb. 1.

$$E = K_1 \cdot a \text{ für } R_a = \infty, U = \text{const.}$$

$$E = K_2 \cdot a \cdot b \text{ für } R_a = \infty, U \equiv b.$$

Mit dem Sollwerteneinsteller einer Regel- oder Steuer-Anlage wird der Betrag der Regel- oder Steuergröße eingestellt [1]. Die dafür in elektrischen Anlagen vornehmlich in Frage kommenden Drehpotentiometer und Drehmelder [2, 3] müssen bestimmte Forderungen erfüllen, um in der Regeltechnik Verwendung finden zu können.

#### 1.1. Lineare Potentiometer.

Diese werden überall dort in größerem Umfang benötigt, wo der Steuerbefehl z.B. in Form der Eingangsspannung in den Regelverstärker linear mit dem Verdrehungswinkel des Schleifers veränderlich sein soll. An ein derartiges Potentiometer sind folgende Forderungen zu stellen:

- a) Feinstufigkeit, damit eine stetige Arbeitsweise z.B. eines Programm-Reglers gewährleistet ist.
- b) Geringe Baugröße.
- c) Gute Kontaktgabe bei geringstem Kontaktdruck. Erstere ist bedingt durch die Forderung nach ruhiger, pendelfreier Arbeitsweise der betr. Anlage. Geringstmöglicher Kontaktdruck ist erforderlich, weil fast immer nur ein geringes Antriebsmoment für den Schleifer des Potentiometers zur Verfügung steht.

d) Korrosionsbeständigkeit.

e) Konstanter weitgehend temperaturunabhängiger Widerstand.

f) Genauigkeit. Man versteht darunter die Abweichung des Widerstandswertes als Funktion des Schleiferdrehwinkels in  $\%$  vom rechnerischen Sollwert bezogen auf den Endwert des Widerstandes. Sollwerteinsteller in Regelanlagen, bei denen es um geringsten Fehler bei gleichzeitiger Beherrschung großer Drehmomente und Trägheitsmomente ankommt, benötigt eine hohe Genauigkeit im Bereich von  $\pm 10\%$  um die Nullstellung herum. Handelt es sich um ein Potentiometer, die in einem elektrischen Rechenvorgang eine Strecke oder einen Winkel eindrehen sollen, dann muß auf dem ganzen Bereich des Drehkörpers eine gleichmäßige Genauigkeit erreicht werden. Es zeigt sich eine gewisse Streuung der Genauigkeit, die durch die Fabrikationsbedingungen hervorgerufen wird, wenn z.B. der verwendete Widerstandsdräht nicht gleichmäßig genug kalibriert ist, wenn der Widerstandsträger in seinem Querschnitt schwach oder wenn die Wickelmaschine aus irgendeinem Grunde im Vorschub nicht stetig genug arbeitet.

Ferner muß man noch besondere rechnerische Überlegungen beachten, wenn die als Steuerbedienende abgegriffene Spannung linearen Rechengrößen, z.B. Winkeln oder Strecken genau entsprechen soll. Diese Überlegungen seien an Hand Abb. 1 angegeben. Dort ist das Drehpotentiometer gestreckt dargestellt. Bei unbelastetem Potentiometer ist

$$E = K_1 \cdot a,$$

d.h. aber der Steuerbefehl  $E$  ist tatsächlich proportional der abgegriffenen Strecke  $a$  und diese wieder dem Drehwinkel  $\alpha$  des Potentiometerschleifers, da für genaue Rechenoperationen konstante Spannung  $U$  und konstanter Widerstand  $R_0$  Voraussetzung ist.

Die Gleichung (1) hat jedoch nur für das belastete Potentiometer Gültigkeit. Wird ein Potentiometer mit einem Widerstand  $R_a$  abgeschlossen, so muß an Stelle des abgegriffenen Widerstands

\* Auszug aus der Dissertation des Verfassers an der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg, 1952.



$R$  der aus dem Abgriff und dem Belastungs-  
stand  $R_a$  zusammengesetzte Gesamtwiderstand  
in die Rechnung eingeführt werden. Dann ergibt sich  
als Steuerbefehl  $E$  die Gleichung

$$E = K_1 \cdot a - \frac{1}{1 + \lambda[a/a_0 - (a/a_0)^2]}, \quad (2)$$

an Stelle der Widerstände  $R$  und  $R_0$  die Strecke  $a$   
sowie für das Verhältnis  $R_0/R_s = \lambda$  gesetzt  
ist. Die Abweichung von der Linearität ist also  
umso größer, je kleiner  $R_a$  ist. Für  $\lambda = 0$  geht Gl.(2)  
in Gl.(1) über, das heißt, der unbelastete Fall mit  
 $E = \infty$  ist wieder erreicht.

Die Ausgangsspannungen mehrerer Potentiometer,  
in einem Rechengerät, können multiplikativ  
additiv (subtraktiv) miteinander verknüpft  
werden.

Für Ausführung einer elektrischen Multiplikation  
kann man das Potentiometer nicht an eine konstante  
Spannung  $U$ , sondern an eine variable Spannung, die  
mit dem zu multiplizierenden Faktor  $b$  proportional ist.  
Analog Gl. (1) ist dann bei unbelastetem Po-  
tentiometer

$$E = K_2 \cdot a \cdot b, \quad (3)$$

man kann auch hier das Widerstandsverhältnis  $R/R_0$   
Streckenverhältnis  $a/a_0$  gleichsetzt und  $1/a_0 = K_2$   
wählt. Für den Belastungsfall gilt das gleiche wie  
oben, d. h. es ist ein möglichst hochohmiger Ab-  
griffswiderstand anzustreben. Für die elektrische  
Addition oder Subtraktion werden zwei oder mehrere  
Potentiometer in Reihe geschaltet. Abb. 2 zeigt eine Schal-  
tung für Addition (Subtraktion), wenn  $U = \text{const}$   
für Multiplikation, wenn  $U = b$  ist.

1.2. Funktions-Potentiometer.

Für Steuerungen in Rechengeräten werden viel-  
fach die Steuerbefehle so benötigt, daß ihre Spannung  
nach einer vorgegebenen Funktion ändert. Wir  
kann man hier zwei Gruppen unterscheiden. Bei der  
ersten ist die Widerstandswicklung linear aufgebracht,  
gewünschte Funktionsverlauf wird also durch  
mechanische Mittel erreicht, z. B. mit Hilfe einer  
Kurvenscheibe entsprechend Abb. 3. Derartige Kur-  
venscheiben lassen sich fabrikatorisch gut herstellen.  
Aber man kann auch Potentiometer verwenden, die  
außerdem können die vorher erwähnten linearen  
Potentiometerwicklungen mit ihren guten Genauig-  
keiten verwendet werden.

In der zweiten Gruppe, die eine ungleichmäßig verteilte  
Wicklung besitzt, werden fast ausschließlich Potentiometer  
mit sinusförmiger Wicklung ver-  
wendet. Doch sei auf diese Poten-  
tiometer nicht näher eingegangen,  
sondern nur die Darstellung einer Sinus-  
-Cosinus-Funktion die später  
in der Darstellung der Koordinatenwand-  
lung eine geeignete Lösung sind.  
Erwähnt sei noch, daß mit  
Hilfe von Brückenschaltungen  
mehrere Potentiometer auch  
komplizierte Funktionen elek-  
trisch dargestellt werden können.  
Doch sind hier durch Schal-  
tungen, die belastete Brücken  
enthalten, die Grenzen derartiger  
Abgriffe von selbst gegeben.

1.3. Drehmelder.

Während Potentiometer den Steuerbefehl auf  
elektrischem oder galvanischem Wege bilden und daher

auch als ohmsche oder galvanische „Abgriffe“ be-  
zeichnet werden, sind Drehmelder induktive Abgriffe,  
weil hier der Sollwert induktiv als Steuerbefehl z. B.  
in eine Steuerung eingeführt wird. Man versteht unter  
einem Drehmelder ein

drehtransformator-  
ähnliches Übertra-  
gungsmittel, das ent-  
weder einen mecha-  
nisch eingedrehten  
Winkel in eine zwei-  
oder dreiphasige  
Wechselspannung  
oder eine zwei- oder  
dreiphasig angelegte  
Wechselspannung in einen mechanischen Winkel ver-  
wandelt [2], [3].

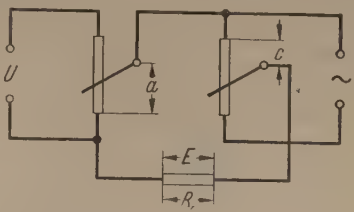


Abb. 2.  
 $E = K_3(a \pm c)$  für  $R_a = \infty$ ,  $U = \text{const.}$   
 $E = K_4(a \cdot b \pm c)$  für  $R_a = \infty$ ,  $U = b$ .

Abb. 4 zeigt diese Verwendung der Drehmelder  
als Mittel zur Übertragung von Winkeln oder auch  
Umdrehungen eines induktiven Gebers auf einen in-

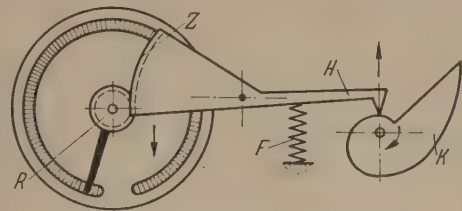


Abb. 3. Funktions-Potentiometer.  
 $K$  = Kurvenscheibe;  $H$  = Fühlhebel;  $F$  = Feder;  
 $Z$  = Zahnradsegment;  $R$  = Ritzel.

duktiven Empfänger. Aus dieser Schaltung entstehen  
durch Änderung der Wicklungsart die Drehmelder als  
Sollwerteinsteller mit den Ausführungen:

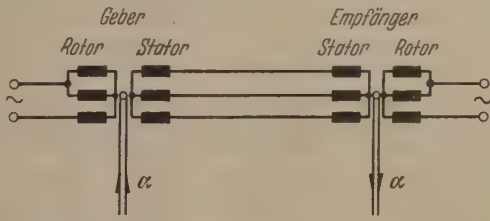


Abb. 4. Drehmelder-Steuerung (Elektrische Welle).

Steuersystem allein, induktiver Geber mit Steuer-  
system und induktiver Geber mit Differentialsystem  
und Steuersystem.

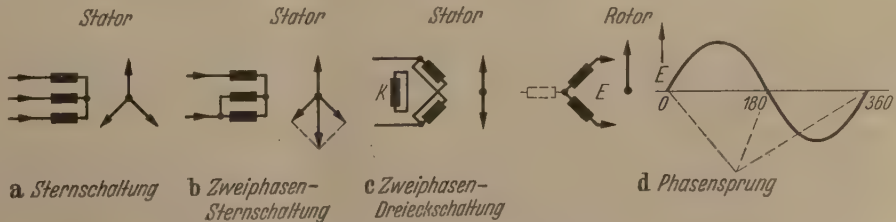


Abb. 5. Stator- und Rotorschaltungen des Steuersystems;  $K$  = Kurzschlußwicklung.

1.3.1 Das Steuersystem.

Jeder Drehmelder besteht aus einem Stator und  
einem Rotor. Beide sind aus einzelnen Blechen zu-  
sammengesetzt und enthalten Nuten zur Aufnahme  
der Wicklung. Als Blech wird normales Dynamoblech



verwendet. (1,35 Watt/kg). Grundsätzlich ist im Stator die Wicklung untergebracht, die die meisten Anschlüsse erfordert, um die Zahl der Schleifringe für den Rotor möglichst gering zu halten. Daher erhält das Steuersystem im Stator eine Dreiphasenwicklung, die so geschaltet werden kann, wie in Abb. 5 dargestellt.

Die reine Sternschaltung findet dann Verwendung, wenn das Steuersystem mit einem Geber als Sollwert-einsteller benutzt wird<sup>1</sup>. Die Zweiphasen-Stern- bzw. Dreieckschaltungen sind einander gleichwertig und werden dann aufgebracht, wenn das Steuersystem allein benutzt werden soll, also nur einphasig erregt

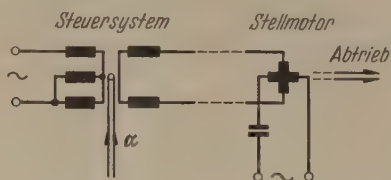


Abb. 6. Beispiel einer Steuerung mit Steuersystem und Wechselstrom-Ferrarismotor als Stellmotor.

wird. Man erhält schaltungsgemäß trotz der dreiphasigen Bewicklung, aber bei voller Ausnutzung des vorhandenen Wickelraumes im Stator, ein Wechselfeld, das im Rotor die gewünschte Steuerbefehl-Spannung induziert. Die Kurzschlußwicklung im Stator dient zur Kompensierung einer senkrecht zum Stator orientierten Feldkomponente des Rotorfeldes, die bei Belastung des Rotors auftreten kann. Dieser erhält eine Einphasenwicklung dergestalt, daß die eine Spule seiner Dreiphasenwicklung fortgelassen wird und die beiden anderen Spulen in Reihe geschaltet bleiben. Bei Drehung des Rotors kann an den herausgeführten Enden seiner Wicklung eine mit dem Drehwinkel  $\alpha$  sinusförmig veränderliche Spannung ab-

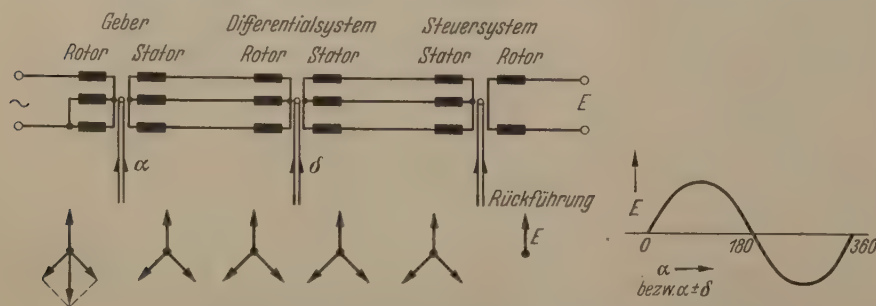


Abb. 7. Anordnung Geber-Steuersystem als Sollwert-einsteller mit Einfügung eines Differentialsystems für zusätzliche Steuerbefehle.

genommen werden. Für die Verwendung dieser Spannung als Steuerbefehl werden wir stets in der Nähe der Null arbeiten und je nach Phasenlage der Steuerspannung eine Richtungsumkehr des Stellmotors erzielen. Je genauer die Anlage arbeiten soll, um so kleiner wird die Steuerbefehl-Spannung, umso näher rückt ihr Arbeitsbereich in den Bereich der Null, in das Gebiet des sogenannten Phasensprunges. Dies ist der Bereich, in dem die Phase von der Null in die 180 Grad-Lage umspringt, was leider nicht plötzlich, sondern innerhalb eines gewissen Winkelbereiches keineswegs aber symmetrisch zur Null erfolgt. Die Art des Phasensprunges ist weitgehend von der

Symmetrie des mechanischen Aufbaues und der eingebrachten Wicklung abhängig. Sein unerwünschter Bereich kann m. W. nur durch sorgfältige Auswahl des Blechmaterials, durch saubere mech. Fertigung (Blechschnitt ohne Grat) und einwandfreie Wicklung auf ein Minimum herabgedrückt werden.

Ein Schaltungsbeispiel für die Anwendung des Steuersystems allein als Sollwert-einsteller zeigt Abb. 6. Es wird überall dort als Sollwert-einsteller benutzt, wenn wir keine Rückführung notwendig haben, wo es also um eine reine Steuerung handelt. Sobald jedoch eine Regelung mit mechanischer Rückführung [3], [4], [5] aufstellen wollen, müssen wir den Sollwert-einsteller aus zwei Übertragungsmitteln zusammensetzen, dem Geber und dem Steuersystem.

### 1.3.2. Anordnung Geber-Steuersystem.

Geber und Steuersystem sind, so wie es Abb. 7 zeigt, zusammengeschaltet, wobei das Differentialsystem zunächst außer Betracht bleiben soll. Der Rotor des Gebers wird mit Wechselstrom z. B. mit 333 Hz oder 500 Hz erregt, so daß sich durch seine Zweiphasen-Sternschaltung ein Wechselfeld bildet, das in der Dreiphasenwicklung des Stators je nach Lage der Wicklungen zur Achse des Wechselfeldes drei verschieden große Spannungen erzeugt. Diese bilden im Stator des Steuersystems entsprechend drei Wicklungen ein Dreiphasen-Feld aus, dessen Vektorkomponenten im Raum stillstehen, und zwar in der gleichen Stellung wie die drei Vektorkomponenten des Wechselfeldes im Stator des Gebers. Wird der Rotor verdreht, also auch das Wechselfeld des Rotors in Drehung versetzt, so dreht sich das Dreiphasenfeld im Stator des Steuersystems um den gleichen Winkel um den der Rotor des Gebers verdreht wurde. Das deutet aber, daß die im Rotor des Steuersystems induzierte Spannung sinusförmig mit ihrer Amplitude

entsprechend der Drehung des Geber-Rotors pulsiert, wenn der Rotor des Steuersystems stillsteht. Wenn umgekehrt der Rotor des Steuersystems verdreht wird und der des Gebers stillsteht, entsteht die gleiche Spannung an den Klemmen des Rotors des Steuersystems. Werden der Rotor des Gebers und der des Steuersystems im gleichen Sinne mit gleicher Geschwindigkeit gedreht, so bleibt die an

den Klemmen des Steuersystem-Rotors entstandene Spannung konstant oder bei richtiger Stellung beider Rotore zueinander gleich null.

Durch die Verwendung der Anordnung Geber-Steuersystem als Sollwert-einsteller entsteht also ein Steuerbefehl, den man sowohl vom Geber als auch vom Steuersystem aus beeinflussen kann, d. h. man kann die für die Regelung charakteristische Rückführung einführen.

Will man noch weitere Beeinflussungsmöglichkeiten haben, so kann man als neues Übertragungsmittel das Differential-System in den Sollwert-einsteller einfügen.

<sup>1</sup> Siehe Abschn. 1.3.2.



### 1.3.3. Anordnung Geber-Differentialsystem-Steuersystem.

Das Differentialsystem hat gemäß Abb. 7 im Rotor 1 im Stator je eine in Stern geschaltete Dreiphasenwicklung. Es kann sich also das durch die Dreiphasenwindungen des Geber-Stators erzeugte „Dreiphasen-“ nunmehr bereits im Rotor des Differentialsystems ausbilden und bei Drehung in den drei Phasen Stators entsprechende Spannungen erzeugen, die der im Steuersystem die gleichen Wirkungen, wie vorher beschrieben, hervorrufen. Es pulsiert aber die Spannung  $E$  des Steuersystems nicht mehr ein im Takte der Geberbewegung  $\alpha$ , sondern es wird durch Einstellung des Differentialgebers (einmalig oder laufend) ein zusätzlicher Winkel  $\delta$  dem Steuerbefehl vom Geber überlagert werden. Man kann natürlich auch mehrere Differentialsysteme in den Leitungszug Geber-Steuersystem einfügen, so kann es die Spannungs- und Leistungsverhältnisse zuzunehmen und so den Steuerbefehl entsprechend mehreren Bewegungen variieren.

### 1.3.4. Koordinatenwandler.

Während die vorher beschriebenen Sollwerteinwandler für Steuerungen und Regelungen allgemeinsten Natur benutzt werden, müssen als Sollwerteinsteller Rechengерäte besondere mit Spezialwicklungen versehene Drehmelder verwendet werden, die man als Koordinatenwandler bezeichnet. Ihr magnetischer Aufbau ist in gleicher Weise aufgebaut wie bei normalen Typen. Die Wicklung ist im Rotor dreiphasig ausgeführt, während der Stator zwei um  $90^\circ$  versetzte Wicklungen trägt. Mit Hilfe dieser Wicklung können verschiedenartige Rechenoperationen durchgeführt werden.

#### 1.3.4.1. Darstellung eines Drehvektors.

Der in reiner Sternschaltung bewickelte Rotor eines Drehmelders wird aus einem symmetrischen Drehstromnetz z. B.  $3 \times 36$  V, 500 Hz dreiphasig ernährt (Abb. 8). An den beiden gekreuzten Statorwicklungen treten Spannungen auf, die die gleiche

Amplitude, aber eine um  $90^\circ$  zueinander verschobene Phasenlage haben. Die eine der beiden Statorwicklungen wird mit einem Potentiometer, die andere mit einem gleich großen Festwiderstand abgeschlossen. Dreht man nun den Rotor, so wandert die Phase der

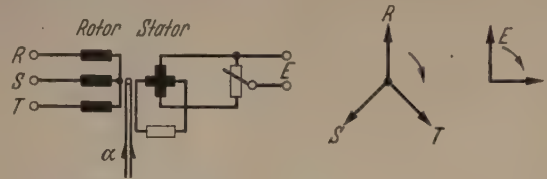


Abb. 8. Drehmelder als Koordinatenwandler zur Vektorendarstellung.

an dem Potentiometer abgegriffenen Spannung mit dem mechanischen Winkel  $\alpha$ . Die Amplitude des Vektors wird dann mittels des Potentiometers eingestellt.

#### 1.3.4.2. Darstellung einer Sinus- und Cosinus-Funktion.

Im Zuge eines Rechenvorganges in automatischen Rechengерäten wird oft die Aufgabe gestellt, den Sinus und den Cosinus eines eingedrehten Winkels elektrisch nachzubilden und die so ermittelte trigonometrische Funktion entweder allein oder zur Multiplikation mit einer anderen Größe oder als Befehlsspannung für elektrische Steuerungen zu verwenden. Abb. 9 zeigt als Lösung dieser Aufgabe das Prinzip-Bild eines Sinus-Cosinus-Koordinatenwandlers, der im Rotor mittels der vorher erwähnten (Abb. 5) „Zweiphasen-Stern- oder Dreieck-Schaltung“ einphasig ernährt wird und im Stator zwei getrennte, räumlich um  $90^\circ$  versetzte Sekundärwicklungen enthält. Diese sind mit einer je Nut sinusförmig abgestuften Windungszahl versehen, so daß an ihren Enden die beiden

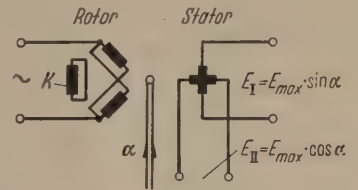


Abb. 9. Sinus-Cosinus Koordinatenwandler. K = Kurzschlußwicklung.

zeigt als Lösung dieser Aufgabe das Prinzip-Bild eines Sinus-Cosinus-Koordinatenwandlers, der im Rotor mittels der vorher erwähnten (Abb. 5) „Zweiphasen-Stern- oder Dreieck-Schaltung“ einphasig ernährt wird und im Stator zwei getrennte, räumlich um  $90^\circ$  versetzte Sekundärwicklungen enthält. Diese sind mit einer je Nut sinusförmig abgestuften Windungszahl versehen, so daß an ihren Enden die beiden

Tabelle 1.





Wickeldaten		Elektrische Daten	
Rotor		18 Nuten, geschränkt um 1 Nutteilung 110 Wdg./Nut 0,22 CuL	$U_{Err} = 50$ V $f = 50$ Hz $I_{Err} = 1,3$ A $N_0 = 3,3$ W; $\cos \varphi = 0,05$
		24 Nuten, ungeschränkt 504 Wdg./Wickl. 0,16 CuL Abstufung pro Nut: 9, 25, 40, 52, 61, 65 Wdg.	$E_{I, II} = 71,5$ V (Leerlauf) $E_{I, II} = 38,1$ V (optimale Last von 125 Ohm) 3. Harm. $E_{3H} = 0,3$ V (Leerlauf) 3. Harm. $E_{3H} = 0,2$ V (125 Ohm Last)
Mechanische Daten		Fehler	
Luftpalt = $2 \times 0,1$ mm Reibungsmoment = 10 cm p Rückwirkungsmom. = 3 cm p/Grad Kontaktdruck der Bürsten 4...5 p Masse (komplett) = 1100 g Masse des Rotors = 380 g Träg.-Mom. d. Rotors = ca. $0,22$ cm g s <sup>2</sup>		Leerlauf	sin-Wickl.: 0,435 V = 0,60 vH cos-Wickl.: 0,327 V = 0,46 vH
		Optimale Last	sin-Wickl.: 0,326 V = 0,85 vH cos-Wickl.: 0,317 V = 0,84 vH
		bezogen auf die maximale Statorspannung	



Tabelle 2.

	Wickeldaten		Elektrische Daten	
Rotor		18 Nuten, geschränkt um 1 Nut-Teilung 120 Wdg./Nut, 0,22 CuL nur 8 Nuten bewickelt	$U_{Err} = 50\text{ V}$ $f = 50\text{ Hz}$ $I_{Err} = 1\text{ A}$ $N_0 = 4,8\text{ W}; \cos \varphi = 0,09$	
Stator		24 Nuten, ungeschränkt 180 Wdg./Nut 0,18 CuL nur 8 Nuten bewickelt	$E = 115\text{ V}$ (Leerlauf) $E = 59,5\text{ V}$ (optimale Last von 250 Ohm) 3. Harm. $E_{3H} = 0,4\text{ V}$ (Leerlauf) 3. Harm. $E_{3H} = 0,2\text{ V}$ (250 Ohm Last)	
Mechanische Daten		Fehler		
Luftspalt = $2 \times 0,1\text{ mm}$ Reibungsmoment = $10\text{ cm p}$ Rückwirkungsmoment = $6\text{ cm p/Grad}$ Kontaktdruck der Bürsten $4 \cdots 5\text{ p}$ Masse komplett = $1000\text{ g}$ Masse des Rotors = $300\text{ g}$ Trägheitsmoment des Rotors = ca. $0,19\text{ cm g s}^2$		Leerlauf	von 0—55 Grad: $0,5\text{ vH}$ bei 60 Grad: $1,6\text{ vH}$	bezogen auf die maximale Sta- torsspannung
		Optimale Last	von 0—55 Grad: $0,2\text{ vH}$ bei 60 Grad: $0,7\text{ vH}$	

Spannungen

$$E_I = E_{max} \cdot \sin \alpha_1 \text{ und } E_{II} = E_{max} \cdot \cos \alpha$$

entstehen.

Ein derartig aufgebauter Koordinatenwandler wurde untersucht. Seine mechanischen und elek- trischen Daten sowie die Versuchsergebnisse sind in der Tabelle 1 angegeben.

### 1.3.4.3. Darstellung einer Strecke.

Um eine lineare Abhängigkeit der Sekundär- spannung  $E$  eines Koordinatenwandlers innerhalb eines großen Bereiches vom mechanisch eingedrehten Winkel erzielen zu können, müssen besondere Wick- lungen im Rotor und Stator vorgesehen werden, da der bis  $30^\circ$  Verdrehung ohnehin geradlinige Spannungs- anstieg z. B. beim Steuersystem (1.31) für Rechen- operationen meistens nicht ausreicht. Um nun die Gleichung

$$U = K_3 \cdot \alpha \tag{4}$$

elektrisch mittels des Koordinatenwandlers darzu- stellen, muß die Gleichung

$$B = \frac{dU}{d\alpha} = K_4 \tag{5}$$

verwirklicht werden, also die Induktion längs des Rotorumfanges konstant sein. Dies läßt sich dadurch erreichen, daß die Erregerwicklung im 18-nutigen Rotor auf je zwei gegenüberliegenden Nuten — ent- sprechend auch die um  $90^\circ$  versetzte Kurzschluß- wicklung — und die Sekundärwicklung des Stators auf je vier gegenüberliegende Nuten zusammen- gedrängt wird. Die Meßergebnisse sowie die elek- trischen und mechanischen Daten eines derartigen „linearisierten Koordinatenwandlers“ sind in der Ta- belle 2 zusammengefaßt.

### 2. Stellmotoren.

Je nach der Art des für Steuerungen benutzten Verstärkers kommen als Stellmotoren Gleich- oder Wechselstrommotoren in Frage. Bei Verwendung eines Röhrenverstärkers, der ja mindestens in seiner

Endstufe mit Wechselstrom arbeitet, und bei ma- gnetischen Verstärkern, deren Arbeitskreis auch m Wechselstrom gespeist wird, ist die Anwendung vo Wechselstrommotoren naheliegend. Für Verstärke in Verbindung mit einem Leonard-Generator kan dagegen ein Gleichstromnebenschlußmotor benutzt werden.

#### 2.1. Gleichstrommotoren.

Bei der Lösung des Problems der genauen Steue- rung von größeren Massen mit ausreichenden Ge- schwindigkeiten und Beschleunigungen drängt sic von selbst der Gleichstromnebenschlußmotor a Stellmotor auf, weil er ein über einen großen Drehzah- bereich praktisch konstantes Drehmoment besitzt un seine Drehzahl in beiden Drehrichtungen kontinuier- lich geregelt werden kann. Es zeigt sich jedoch, da- er für Steuerzwecke nach anderen Gesichtspunkten z beurteilen oder auszusuchen ist als sonst.

So macht z. B. das Trägheitsmoment des Ankers de Hauptanteil des zu steuernden Trägheitsmomentes aus, selbe wenn große Massen beschleunigt werden müssen. Um nu dieses Trägheitsmoment möglichst herabzusetzen, wurde da Verhältnis von Ankereisenlänge zu Ankerdurchmesser gleic 2 bis 2,5: 1 gewählt.

Höher zu gehen ist praktisch nicht mehr möglich, da ir- folge der dann weit auseinanderliegenden Lagerstellen mecha- nische Schwingungen der Motorachse auftreten. Ferner bilde die wegen der Vermeidung von ausgesprochenen Nutenvorzug- stellen erforderliche Nutschränkung bis zu einer Nutteilung ein Hindernis für das Wickeln zu langgestreckter Anker- Schließe begrenzt auch der notwendige kleine Luftspalt di- Ankereisenlänge aus mechanischen, schwingungstechnische Gründen.

Ferner ergeben praktische Folgerungen und theoretisch Überlegungen, daß auch die Größe des ohmschen Widerstande des Motorankers von Bedeutung ist. Je kleiner nämlich diese Widerstand ist, um so günstiger liegt der Einschwingvorgang beim plötzlichen Einschalten der Steuerung, und um so ge- ringer werden Orts- und Amplitudenfehler. (Ortsfehler ist di- bei gleichmäßig beschleunigter Geberbewegung auftretend Winkel-(Orts-)Differenz zwischen Geber und Stellmotor Amplitudenfehler treten bei harmonischer Geberbewegung als Differenz der Geber- und Stellmotor-Amplitude auf. Si- sind praktisch vernachlässigbar klein [6].)

Auch die Größe der Leerlaufdrehzahl ist von Wichtigkeit denn mit steigender Leerlaufdrehzahl wird der Einschwing- vorgang immer besser gedämpft, die dynamischen Fehle



len verkleinert, während die statischen Fehler teils vergrößert, teils verkleinert werden.

Man sieht, daß diese Forderungen sich zum Teil widersprechen, so daß ein brauchbarer Kompromiß geschlossen werden muß, der mit Hilfe der verschiedenen Abstimm- und Aufschaltungsmöglichkeiten der verwendeten Verstärker zunächst experimentell ermittelt wurde. Es dürfte interessant sein, daß man sich theoretisch zu den gleichen Forderungen an den Gleichstromnebenschlußmotor als Stellmotor gelangte [6].

## 2.2 Wechselstrom Ferrarismotoren.

Für Steuerungen oder Regelungen mit einer mechanisch abgegebenen Leistung des Stellmotors von bis 20 Watt, z. B. für den Betrieb von elektrischen Rechengeräten, wird die Verwendung eines Gleichstrommotors zu unwirtschaftlich, falls nicht etwa besonders hohe Geschwindigkeiten und Beschleunigungen einen gewissen Aufwand im Hinblick auf eine gute Genauigkeit rechtfertigen. Bei Rechengeräten möchte man jedoch im allgemeinen auf eine Steuerung ohne Umwandlungs- oder Umformer zurückgreifen, und mit Rücksicht auf den Steuerverstärker einen Wechselstrommotor verwenden.

Ein solcher Wechselstrommotor sollte aber möglichst ein Verhalten aufweisen, das dem eines Gleichstromnebenschlußmotors nahe- oder gleichkommt und auch die für diesen ermittelten Forderungen einschließt. Erfüllt ist der bekannte Wirbelstrommotor (Ferraris-Motor) in geänderter Ausführung (Abb. 10) am günstigsten<sup>1</sup>. In einem lamellierten Ringfeldstator, der zwei um 90° gegeneinander senkrecht aufeinander stehende Wicklungen, eine Erreger- und die Steuerwicklung trägt, befindet sich ein feststehender Eisenanker, der konzentrisch angeordnet, ein feststehender Eisenanker. In dem infolge des Wunsches nach geringer Reibungsverlustleistung möglichst kleinen Luftspalt zwischen Anker und Stator ist eine dünnwandige Aluminiumglocke drehbar gelagert angeordnet, die den Rotor bildet. In der Schaltung A nach Abb. 10 sind die beiden Wicklungen galvanisch voneinander getrennt. Die elektrische Phasenverschiebung wird durch den Einbau eines Kondensators C in den Steuerkreis erreicht. In der ebenfalls möglichen Schaltung B (Abb. 10) ist die Wicklung in Brückenschaltung angeordnet, was den Vorteil gleichmäßiger thermischer Belastung des gesamten Motors bietet, da während der längeren Betriebszeit die beiden gegenüberliegenden Brückenarme der Statorwicklungen abwechselnd entsprechend der Phasenlage der Steuerwicklung mehr oder weniger stark stromführend sein werden. Die galvanische Kopplung beider Kreise ist unbedenklich, da die Ausgangsstufen der Verstärker jeweils Ausgangstransformatoren aufweisen, die einerseits die galvanische Trennung des Verstärkers vom Motor bewirken, andererseits eine Anpassung des Verstärker-Ausgangskreises an den Motor ermöglichen.

Zur näherungsweisen rechnerischen Untersuchung wird eine vereinfachte Darstellung (Abb. 11) gewählt. In ihr sind die beiden um 90° räumlich und zeitlich gegeneinander versetzten, als homogen angenommenen Wechselfelder, das Erregerfeld  $B_E$  und das Steuerfeld

$B_S$  dargestellt, in denen eine in sich kurzgeschlossene Schleife aus Aluminium drehbar angeordnet ist. Man kann sich zwanglos die Glocke des Ferraris-Motors aus vielen solchen Leiter-Schleifen dargestellt denken, für die dieselben Überlegungen gelten, wie für die im folgenden betrachtete Einzelschleife. Die beiden homogenen Wechselfelder sind:

$$\begin{aligned} \text{Erregerfeld: } B_E &= B_{Em} \cdot \sin \omega t; \\ \text{Steuerfeld: } B_S &= B_{Sm} \cdot \cos \omega t. \end{aligned} \quad (4)$$

Die mit der Leiterschleife ( $l, r, \alpha$ ) verkettete Normalkomponente des Kraftflusses lautet:

$$\Phi = + 2 r l B_S \sin \alpha - 2 r l B_E \cos \alpha \quad (5)$$

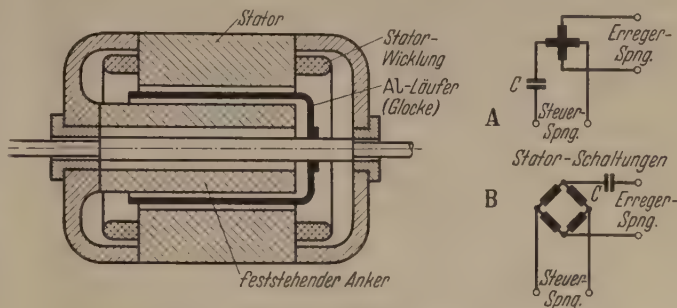


Abb. 10. Wechselstrom-Ferraris-Motor.

und nach Einsetzung von Gl. (4) in Gl. (5)

$$\Phi = 2 r l B_{Sm} \sin \alpha \cos \omega t - 2 r l B_{Em} \cos \alpha \sin \omega t. \quad (6)$$

Hierbei wurde ein Kraftfluß, der den Leiter von oben nach unten (Abb. 11) durchdringt, als positiv angenommen.

Die in der Leiterschleife induzierte Spannung ist nach dem Induktionsgesetz

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (7)$$

Da nun  $\Phi$  eine Funktion von  $\alpha$  und  $t$  nach Gl. (6) ist, wird

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt. \quad (8)$$

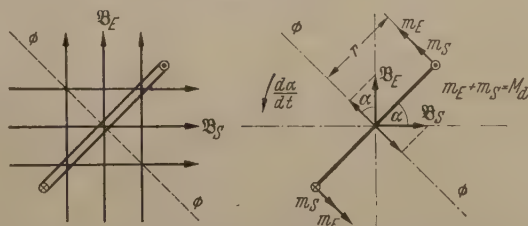


Abb. 11. Vereinfachte Darstellung der beiden Wechselfelder des Ferraris-Motors, in denen sich eine Drahtschleife ( $l$  = Umfang,  $r$  = Radius) mit der Geschwindigkeit  $\dot{\alpha} = d\alpha/dt$  bewegt.

Zur Ermittlung der Drehmomente benötigen wir den in der Leiterschleife (in den Rotor-Abschnitten!) fließenden Strom. Für ihn ergibt sich, selbst wenn man nur den ohmschen Widerstand berücksichtigt, ein ziemlich unübersichtlicher Ausdruck, weil beide Wechselfelder in ihm erhalten bleiben müssen. Die Gleichsetzung dieser Felder, wie beim üblichen Wirbelstrom-Motor darf hier nicht erfolgen, weil der Ferraris-Stellmotor bei konstantem Erregerfeld  $B_E$  aber variablem Steuerfeld  $B_S$  untersucht werden muß. Daher wird zur Berechnung des Drehmomentes das Gesetz von der Kraftausübung eines Feldes  $B$  auf einen senkrecht zu ihm angeordneten Leiter von der Länge  $l$  mit dem Strom  $i$  angewendet.

<sup>1</sup> Vgl. R. OETIKER: Der Ferraris-Motor, (unveröffentlicht), R. STENZEL: Entwicklung und Prüfung von Ferraris-Steuer-motoren (unveröffentlicht).



Nach Ausführung der Differentiation von Gl. (8) und Umformung der Gleichung für den Strom ( $i = e/R$ ) ergibt sich für das Gesamtmoment  $M_D$  der Ausdruck

$$M_D = - \frac{d\alpha}{dt} \frac{2 \tau^2 l^2}{R} (B_{Em}^2 + B_{Sm}^2) + \frac{4 \tau^2 l^2}{R} (B_{Sm} B_{Em}). \quad (9)$$

Wir sehen, daß das Drehmoment außer von den mechanischen und elektrischen Daten der Leiter-schleife (der Aluminiumglocke), den durch sie und durch den Fluß bedingten Strömen und der Größe des Erreger- und Steuerfeldes auch von der Differenz der Umlaufgeschwindigkeit beiden Felder und der Drehgeschwindigkeit des Rotors abhängt.

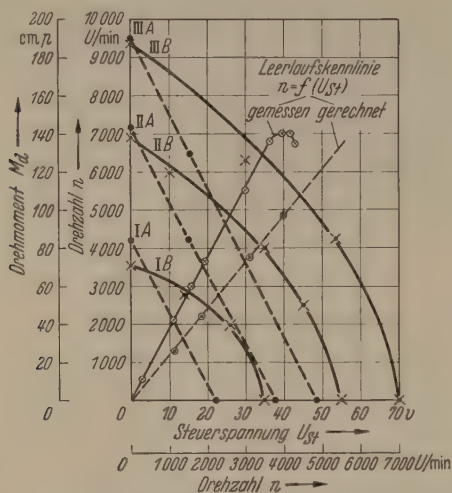


Abb. 12. Gemessene und näherungsweise errechnete Kennlinien eines Wechselstrom-Ferrarismotors.

Belastungskennlinien.

Kurve I A:  $M_d = f(n)$  bei  $U_{st} = 18,7 \text{ V}$  — Kurve I B:  $M_d = f(n)$  bei  $U_{st} = 19,6 \text{ V}$ ; Kurve II A:  $M_d = f(n)$  bei  $U_{st} = 31,5 \text{ V}$ ; Kurve II B:  $M_d = f(n)$  bei  $U_{st} = 30,0 \text{ V}$ ; Kurve III A:  $M_d = f(n)$  bei  $U_{st} = 40,0 \text{ V}$ ; Kurve III B:  $M_d = f(n)$  bei  $U_{st} = 41,5 \text{ V}$ .

— — —, gerechnete Werte — x — x — x — gemessene Werte.

Erregerspannung: 110 V; Erregerfrequenz: 500 Hz; Phasenkondensator 2,5  $\mu\text{F}$ ; Synchrone Drehzahl: 10 000 U/min; Maximal-Drehzahl: 7000 U/min; Abgeb. Dauerlsg.: 1,0 W; Kurzzeitg. abg. Lsg.: 4,6 W; Übertemperatur: 49° C; Zulässige Steuerspg.:  $\pm 30 \text{ V}$ ; Ansprech-Steuerspg.:  $\pm 0,5 \text{ V}$ .

Setzen wir nunmehr die elektrischen und mechanischen Daten eines Ausschnittes der Aluminiumglocke ein und fassen die Abmessungen der Glocke multipliziert mit dem Quadrat des Erregerfeldes  $B_E$  zur Konstanten  $K_5$  zusammen, so ergibt sich das Gesamt-Drehmoment bei  $p$  Polpaaren zu

$$M_D = K_5 \frac{B_{Sm}}{B_{Em}} - \frac{\alpha \cdot p}{2} \cdot \left( 1 + \frac{B_{Sm}^2}{B_{Em}^2} \right). \quad (10)$$

Wenn man  $\alpha = 0$  setzt, ergibt sich das Anlaufmoment zu

$$M_0 = K_5 \cdot \frac{B_{Sm}}{B_{Em}}. \quad (11)$$

Setzt man das Drehmoment  $M_D = 0$ , so ergibt sich die Leerlaufdrehzahl  $n$

$$\left( \alpha = \frac{2\pi \cdot n}{60}; \omega = 2\pi \cdot f; p = \text{Polpaarzahl} \right) \text{ zu} \quad (12)$$

$$n = \frac{120 \cdot f}{p} \frac{\frac{B_{Sm}}{B_{Em}}}{1 + \left( \frac{B_{Sm}}{B_{Em}} \right)^2}.$$

Aus Gl. (12) erhält man die synchrone Drehzahl, wenn man  $\frac{B_{Sm}}{B_{Em}} = 1$  setzt. Für alle anderen Werte bleibt die Leerlaufdrehzahl unter der synchronen Drehzahl.

Mit Hilfe der Näherungsgleichungen (10), (11), (12) wurden einige Typen von Ferrarismotoren durchgerechnet, deren Leerlaufs- und Belastungskennlinien experimentell ermittelt worden waren. Die Ergebnisse sind für eine Type in Abb. 12 zusammengestellt.

Eine genauere Vorausberechnung eines Ferrarismotors ist nur möglich, wenn man die Feldverteilungskurven ermittelt, was ein zeitraubendes Verfahren bedeutet. Will man jedoch z. B. bei der Entwicklung eines Ferraris-Wechselstrommotors vorwiegend den experimentellen Weg gehen, so könnten die Gleichungen (10), (11), (12) zunächst zur angenäherten Bestimmung des Drehzahlanstieges, des Anlaufmomentes und der mechanischen Abmessungen der Glocke verwendet werden. Sobald dann das Versuchsmuster gebaut ist, könnten nach Durchführung der ersten Messungen die Verbesserungen einsetzen, d. h. die Variierung der Erreger- und Steuerwicklung und die Änderung der Aluminiumglocke, um ein Optimum Drehzahlanstieg und Stillstandsmoment herauszuholen. Handelt es sich in Hand damit müssen aber bereits Erprobungen dieser Versuchsmotoren in Steuerungen oder Regelanlagen gehen, da der Motor mit dem größten Anzugsmoment durchaus nicht der für Steuer- und Regelungszwecke am besten geeignete zu sein braucht. Die im Abschnitt 2.1 genannten Spezialforderungen für Stellmotoren sind beim Ferrarismotor infolge seiner konstruktiven Durchbildung erfüllt.

### 3. Beruhigungs-(Dämpfungs-) Mittel.

Bekanntlich ist bei jeder mit einem Verstärker arbeitenden Steuerung oder Regelung mit dem Auftreten von Pendelungen zu rechnen. Die Beseitigung solcher Pendelungen ist neben der Erzielung eines kleinen Übertragungsfehlers die Hauptfrage bei der Entwicklung einer brauchbaren Anlage. Praktische Entwicklung und theoretische Behandlung [6] haben übereinstimmend ergeben, daß lediglich mit Hilfe des ursprünglichen Steuerbefehls, des Winkels oder Weges ein Einfluß auf die Pendelungen oder auf den Fehler nicht möglich ist. Man ist gezwungen, den ersten, zweiten und in Einzelfällen auch den dritten Differentialquotienten des Weges (Winkels) nach der Zeit einzuführen. Infolgedessen sind folgende Probleme zu lösen:

1. Exakte oder wenigstens näherungsweise Bildung der erforderlichen Differentialquotienten-Befehle.

2. Einführung dieser zusätzlichen Befehle so in die Verstärker oder in andere Stellen der Anlage, daß die gewünschte Wirkung, also Beruhigung und Fehlerkompensation, erzielt wird.

Die Bildung der Beruhigungsbefehle kann durch eigene Übertragungsmittel oder durch irgendwelche Kunstschaltungen erfolgen, und zwar:

a) Dort, wo die Steuerbefehle z. B. durch einen motorisch angetriebenen Sollwerteinsteller gebildet werden. Hier entsteht der exakte Steuerbefehl, indem man durch einen an dieser Stelle sitzenden Tachometergenerator (Gleich- oder Wechselstrom) aus der Weg die Geschwindigkeit ableiten kann. Die Beschleunigung, also die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit, ergibt sich bei Verwendung eines Gleichstromtachometergenerators durch Einschalten eines geeigneten Kondensators.

b) An der Stellmotorstelle, wo allerdings der Steuerbefehl um den Fehler und die Zeitkonstante der Anlage gefälscht ist, so daß auch die Geschwindigkeit und Beschleunigungswerte falsch werden. Doch we-



der die genannten Werte am häufigsten gebildet, am Stellmotor naturgemäß mehr Drehmoment erfürung steht, als an der Geberstelle.

Durch Umformung des Fehlers selbst, wenn die altbildung weder am Sollwertesteller, noch am motor erfolgen kann. Außer Kondensatoren n hierzu Kunstsaltungen mit leerlaufenden hstrommotoren und Kompensationseinrichtungen.

### 3.1. Gleichstromgeneratoren.

Gleichstrom-Tachometergeneratoren sind die wichtigen Übertragungsmittel für die genaue Darstellung Geschwindigkeitswertes und die Ableitung des Beruhigungswertes aus diesem. Für kleine Steuerungen bis zu etwa 20 Watt abgegebener Leistung des motors kann ein kleiner Gleichstromgenerator permanentem Feldmagneten Verwendung finden, allem, wenn als Verstärker ein Röhrenverstärker anden ist.

Für genaue Rechenoperationen jedoch und für ere Regelanlagen werden größere Generatoren vwendig, bei denen auf geringstes Ankerträgheitsmoment — also großes  $l/d$  — und auf guten Bürsteng geachtet werden muß. Ist das Trägheitsmoment Ankers zu groß, so kann die Verwendung des Gectors an der Geberstelle unmöglich gemacht werden, bei Anbringung am Stellmotor kann er die Arbeitsngungen der Anlage so verschlechtern, daß die h den Beschleunigungsbefehl erzielten Verbesseren wieder aufgehoben werden. Zu geringer stendruck schließlich kann u. U. gerade das Gegen-einer Dämpfung hervorrufen und Pendelung ernen. Ein Ausweg, um zwischen den motortechl bedingten und den steuertechnisch geforderten essionungen einen Kompromiß zu finden, würde die affung eines langsam laufenden Gleichstrom-rators mit genügend hoher Spannung bedeuten, en Ankerträgheitsmoment ja, bezogen auf die se des Stellmotors, nur noch umgekehrt pro-ional dem Quadrat des Übersetzungsverhältnisses sam wäre.

### 3.2. Wechselstromgeneratoren.

Für Anlagen, die mit Röhrenverstärkern arbeiten, ie Aufschaltung der Geschwindigkeit durch einen hselstromgenerator vorteilhaft. Man kann hierzu Ferrarismotor in seiner Umkehr als Wechselstrom-rator verwenden, weil sein geringes Trägheits-ment und sein geringes Reibungsmoment für die rtische Verwendung in Anlagen geringer Leistung günstig ist.

Der Ferraris-Tachometergenerator ist einfach die Umkehr Ferrarismotors. Durch die Erregerwicklung des Stators eht ein Wechselfeld, in dem die dünnwandige Aluminium-te des Rotors drehbar gelagert ist. Bei Drehung wird in-der „Flußverzerrung“ durch die Glocke in der um 90° etzten Steuerwicklung des Stators eine Wechselspannung iziert, die linear mit der Drehzahl ansteigt. Allerdings en an die Fabrikationsgenauigkeit infolge der erforder-n Symmetrie im Rotor und Stator hohe Anforderungen llt, da nämlich sonst schon im Stillstand eine Spannung e Steuerwicklung induziert wird, die als Nullspannung Störung der Anlage bedeutet. Man kann zwar diese Null-ung durch eine Hilfsbrückenschaltung kompensieren, aber die durch Unsymmetrie der Glocke, z.B. der Wandte, entstehenden Nullspannungen, die von der jeweiligen ung der Glocke im Wechselfeld hervorgerufen werden, t mehr ausgleichen. Man hat festgestellt, daß diese Null-ung frequenzabhängig ist, daß also bei 50 Hz eine ge-

ringere Nullspannung auftritt, als beispielsweise bei 500 Hz, der Frequenz, die für Steuerungen in Rechengeräten am häufigsten verwendet wird. Für solche Fälle wurde trotzdem ein 50 Hz-Wechselstromtachometer-Generator verwendet, da man den Geschwindigkeitsbefehl ohne weiteres auf die Endstufe des Verstärkers aufschalten kann, die stets mit 50 Hz zum Anschluß an den 50 Hz-Stellmotor ausgeführt wird.

### 3.3. Verschiedene Kunstsaltungen.

Saltungen ohne Tachometergeneratoren spielen vor allem dann eine Rolle, wenn es sich um Anlagen handelt, die mit einem magnetischen Verstärker arbeiten. Die Beeinflussung eines derartigen Verstärkers erfolgt jedoch nicht praktisch verlustlos wie beim Röhrenverstärker, sondern erfordert Leistung. Das bedeutet aber, daß die Anwendung eines Tachometergenerators an *Geberstelle* stets an dem hohen aufzubringenden Antriebsmoment scheitert. Die Verwendung einer Tachometermaschine am Stellmotor macht Schwierigkeiten infolge der räumlichen Entfernung zwischen diesem und dem Verstärker. Außerdem reicht sie *allein* in vielen Fällen wohl zur Dämpfung aber nicht zur richtigen Vorhaltbildung aus.

Man hat sich nun so geholfen, daß man die Steuer-spannung selbst, also die Fehlerspannung der Anlage, künstlich mehrmals in den Verstärker einführt, so daß man mittelbar und unmittelbar den Ausgangswert des Verstärkers oder seine Stabilität und Steilheit beeinflusst.

Abb. 13 zeigt ein Prinzibbild einer Regelung mit magnetischem Verstärker und Leonardumformer, die ihre Beruhigungsbefehle der Spannung des Leonard-Generators entnimmt. Die geregelte Ausgangs-spannung des Leonard-Generators die dem Fehler der gesamten Anlage proportional ist, wird über einen kleinen leer laufenden Gleichstrommotor in den Verstärker zurückgeführt, und zwar so, daß diese Beruhigungsbefehle die Steilheit des Verstärkers herabsetzen, um Pendelungen zu unterdrücken. Sie gelangen nur bei Änderungen der Spannung des Leonard-generators über den Dämpfungsmotor in den Verstärker, da dieser, abgesehen von seinem Leerlaufstrom, wie ein Kondensator arbeitet. — Die Anwendung eines Kondensators an Stelle des Dämpfungsmotors scheitert an der Größe des Kondensators, da die Frequenz der Pendelungen einer Steuerung relativ gering ist. —

Der steilheitsvermindernde Einfluß der Beruhigungsbefehle bewirkt neben der Dämpfung auch eine gewisse Verminderung der Beschleunigungsfehler, da durch elektrische (Vorwiderstand) und mechanische (Zusatzmasse auf dem Anker des Dämpfungsmotors) Regulierung das Optimum der Dämpfung eingestellt werden kann.

Eine schädliche Rolle spielt der Leerlaufstrom des Dämpfungsmotors hinsichtlich des Geschwindigkeitsfehlers einer Steuerung oder Regelung. Je höher nämlich die Geschwindigkeit wird, um so größer wird der Fehler, da die Steuerbefehle mit um so größerer Amplitude in den Verstärker eingehen müssen, je größer die Stellmotor-Drehzahl, also auch die Ausgangs-spannung des Verstärkers, sein soll. Gleichzeitig steigt aber auch die Drehzahl des Dämpfungsmotors, und da es sich hierbei um Größenordnungen von 8000 bis 10 000 U/min handelt (infolge der Kleinheit des Motors), wächst auch sein Leerlaufstrom. Damit wird aber die Steilheit des Verstärkers weiter herabge-



setzt, und der Steuerbefehl vom Sollwert-einsteller muß zum Ausgleich mit noch größerer Amplitude in den Verstärker eingehen, so daß der Fehler ebenfalls größer wird.

Zur Kompensation dieses unerwünschten Geschwindigkeitsfehlers wird der „Treibende Dämpfungsmotor“ (T-Motor) verwendet. Dies ist der gleiche Gleichstrom-Nebenschlußmotor wie der Dämpfungsmotor, nur muß der Anstieg seiner Leerlaufdrehzahlkennlinie etwas steiler verlaufen als der des D-Motors. Die Wirkungsweise dieses „Dämpfungsaggregates“ ist folgende:

Spannungsänderungen der Ausgangsspannung des Leonard-Generators erzeugen Stromstöße, die über

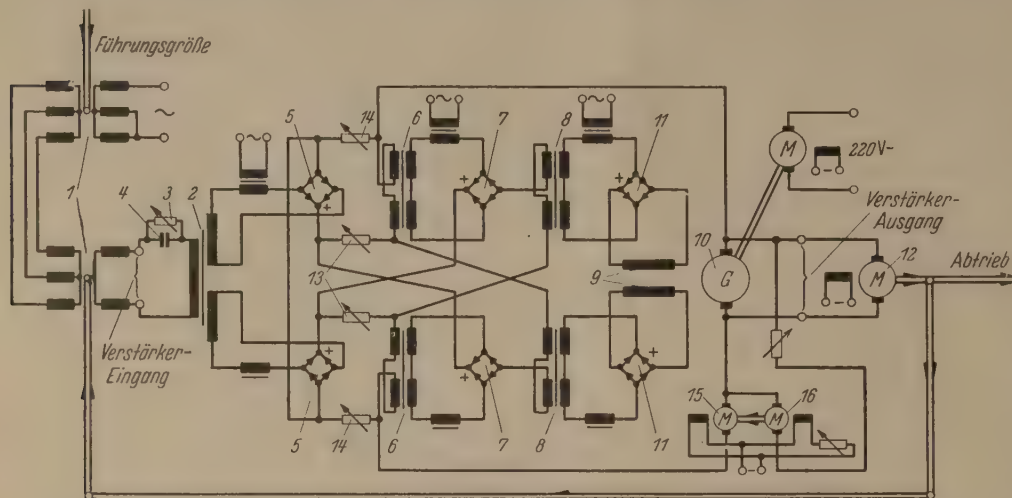


Abb. 13. Prinzipschaltbild eines zweistufigen Magnetischen Verstärkers mit Leonard-Umformer. 1 Sollwert-einsteller; 2 Eingangstransformator; 3, 4 Rückmomentenausgleich; 5, 9, 11 Selengleichrichter; 6, 8 Verstärkerdrosseln; 9 Felder des Leonard-Generators; 10 Anker des Leonard-Generators; 12 Stellmotor; 13 Kompensationswiderstände; 14 Dämpfungswiderstände; 15, 16 Dämpfungsaggregat.

den D-Motor, Beruhigungsbefehle einfließen lassen. Konstante Ausgangsspannungen aber, die den unerwünschten Leerlaufstrom des D-Motors in den Verstärker hineinschicken, bewirken auch eine Drehung des T-Motors, der mit dem D-Motor direkt gekuppelt ist.

Da sein Drehzahlanstieg steiler als der des D-Motors ist, wird er diesen antreiben. Durch Einstellung seiner Drehzahl (Feldschwächung und Ankerstromregulierung) kann erreicht werden, daß der D-Motor in einem gewissen Bereich keinen Strom aufnimmt, also auch keinen Strom in den Verstärker schicken kann, der dort steilheitsvermindernd und fehlervergrößernd wirkt. Man kann es sogar erreichen, daß der D-Motor als Generator nunmehr steilheits-erhöhende Ströme in den Verstärker hineinschickt, aber nur im Falle konstanter Spannungen des Leonard-Generators, also konstanter Drehzahl des Stellmotors. Die Anordnung arbeitet dann ähnlich dem Tachometergenerator an Empfängerstelle, wenn er lediglich Geschwindigkeitsbefehle erzeugen soll.

Als dritte Schaltungsmöglichkeit ist in Abb. 13 noch ein Kompensationskreis eingezeichnet, der sich bei phasenempfindlichen magnetischen Verstärkern anwenden läßt. Vorausgesetzt ist, daß der Verstärker in zwei Seiten aufgespalten sei, um je nach Aussteuerung der einen oder anderen Seite eine Phasenumkehr oder Umpolung der Ausgangsspannung zur Erzielung der erforderlichen Drehzahl-Umkehr zu erhalten. Im Falle eines Verstärkers mit Leonard-

Generator wird von jeder Verstärker-Seite ein Teil des Generators gegensinnig angesteuert. In der genannten Kompensations-Schaltung wird nun ein Teil der Spannung der angesteuerten Seite gegensinnig auf die nicht angesteuerte Seite und umgekehrt gegeben. Durch die kompensierende Wirkung Spannungsabfalls an einem einstellbaren Widerstand in jeder Verstärkerseite wird ein bedeutend steiler Spannungsanstieg erzielt, als ohne kreuzweise Klinkung. Oder, anders ausgedrückt, es wird zur Erzielung einer bestimmten Steilheit eine geringere Spannung (Steuerbefehl) benötigt, d.h. die Anlage arbeitet mit geringerem Fehler. Wenn wir die Natur der zurgeführten Spannung, bezogen auf ihr Verhältnis

Steuerbefehl, betrachten, so stellen wir fest, daß es sich offenbar um einen steuer- oder verstärkertechnisch linear umgeformten Steuerbefehl selbst handelt. Man kann also bei dieser noch einmaligen Umschaltung des Widerstands eine wesentliche Verbesserung der Ansteuerung erzielen.

Zusammenfassend dieses Abschnitts festzustellen: Die Schaltung des Widerstands der Geschwindigkeit der Beschleunigung durch Kunstschaltungen möglich. Das Verfahren ist wohl prakt-

brauchbar, man erreicht aber nicht dasselbe, was durch Tachometergeneratoren, die allerdings einen größeren Aufwand darstellen.

#### 4. Verstärker.

Die Verstärkereinrichtungen für elektrische Steuerungen oder Regelanlagen dienen dazu, den Steuerbefehl so umzuformen und zu verstärken, daß Ausgangsleistungen erzielt werden, die zwischen ein paar Watt und 20...25 kW liegen können. Außerdem sollen sie zusätzliche Befehle, wie sie im Abschnitt 3 erläutert wurden, so verarbeiten, daß zusammen mit den Steuerbefehlen ein zweckentsprechendes, genaues und pendelfreies Arbeiten des Stellmotors erreicht wird.

Im Laufe der Entwicklung haben sich verschiedene Verstärkerarten herausgebildet, die man etwa in folgende einteilen kann:

1. Mechanische Verstärker;
2. Vakuumröhren-Verstärker;
3. Stromtor-Verstärker;
4. Magnetische Verstärker;
5. Verstärker-Maschinen, z. B. Leonard-Generatoren, Amplidyne, Rototrol;
6. Hydraulische Verstärker.

##### 4.1. Röhren-Verstärker.

Für Steuer- und Regelzwecke werden ausnahmslos Niederfrequenzverstärker verwendet. Leider kann man Niederfrequenzverstärker, wie sie für elek-



stische Zwecke verwendet werden, nicht ohne weiteres übernehmen. Es sind vielmehr folgende Unterschiede zu berücksichtigen:

1. Während die elektro-akustischen Verstärker im Bereich von etwa 30 bis 10 000 Hz unter Einhaltung der möglichst geringen linearen und nichtlinearen Verzerrung arbeiten sollen, wird im Steuer-Verstärker eine Frequenz, z. B. 50 oder 500 Hz verarbeitet.

3. Möglichkeit der Einführung eines Dämpfungs- oder Geschwindigkeitsbefehls zusätzlich zum Steuerbefehl.

4. Möglichkeit der Verarbeitung von Gleich- und Wechselspannungsbefehlen für Rechenzwecke.

5. Möglichkeit zur Durchführung einer selbsttätigen, am besten kontaktlosen Synchronisierung [7].

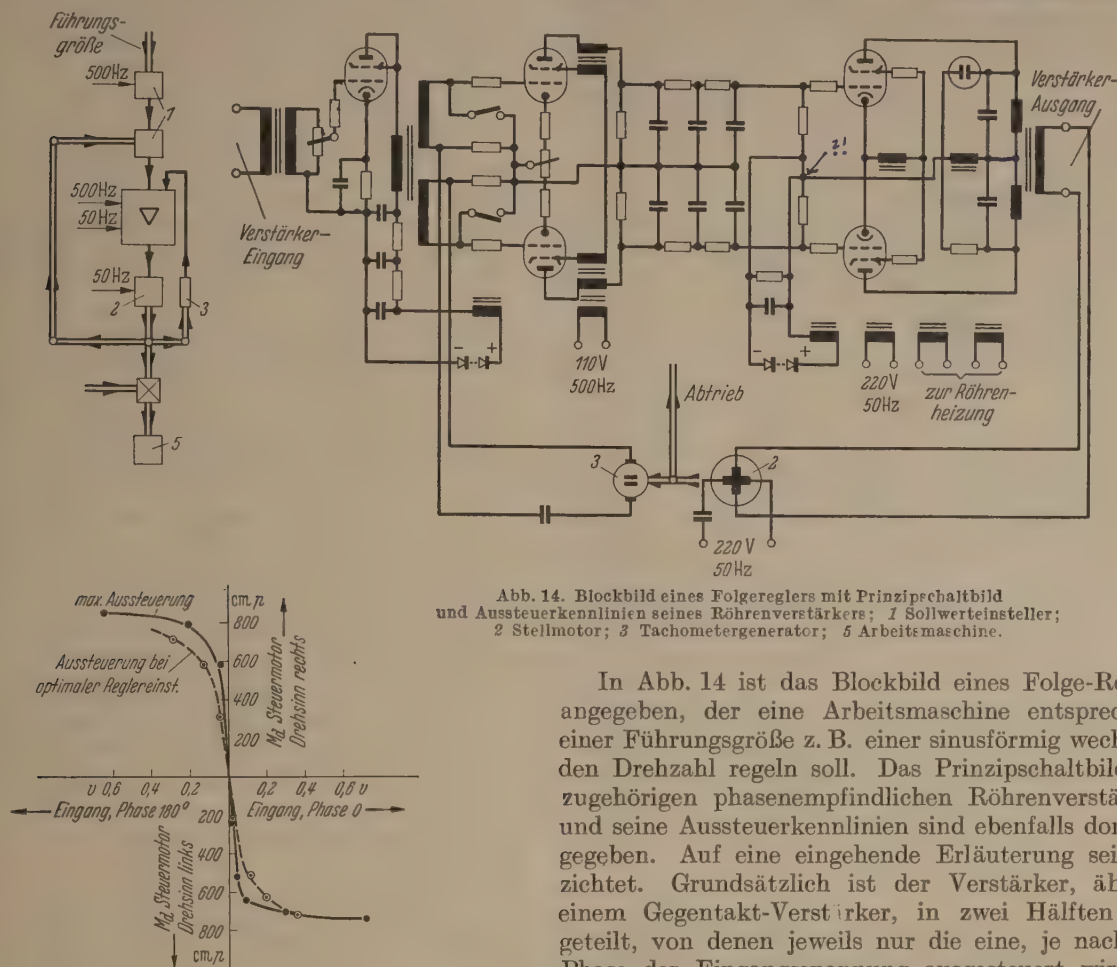


Abb. 14. Blockbild eines Folge-reglers mit Prinzipschaltbild und Aussteuerkennlinien seines Röhrenverstärkers; 1 Sollwert-einsteller; 2 Stellmotor; 3 Tachometergenerator; 4 Arbeitsmaschine.

In Abb. 14 ist das Blockbild eines Folge-Reglers angegeben, der eine Arbeitsmaschine entsprechend einer Führungsgröße z. B. einer sinusförmig wechselnden Drehzahl regeln soll. Das Prinzipschaltbild des zugehörigen phasenempfindlichen Röhrenverstärkers und seine Aussteuerkennlinien sind ebenfalls dort angegeben. Auf eine eingehende Erläuterung sei verzichtet. Grundsätzlich ist der Verstärker, ähnlich einem Gegentakt-Verstärker, in zwei Hälften aufgeteilt, von denen jeweils nur die eine, je nach der Phase der Eingangsspannung angesteuert wird, so daß auch die Phasenlage der Ausgangsspannung dementsprechend wechselt. Bei Verwendung eines Ferraris-Wechselstrommotors (2,2) werden dadurch auch dessen Drehzahl und Drehsinn so geregelt, daß einerseits das Steuersystem über die Rückführung und andererseits auch die Arbeitsmaschine in Abhängigkeit von der Führungsgröße und der Lage von Geber und Steuersystem zueinander nachgedreht werden. In der Tabelle 4 sind die Hauptdaten der Regelanlage und des Verstärkers zusammengestellt.

Der vorstehend geschilderte Verstärker erfüllt zwar seinen Zweck, dürfte aber wegen seiner Unwirtschaftlichkeit (Prinzip der Zweiseitensteuerung) nur in einzelnen Fällen Anwendung finden <sup>1</sup>.

#### 4.2. Magnetische Verstärker.

Die Verstärkerwirkung gleichstromvormagnetisierter Drosseln wird seit etwa 15 Jahren in steigendem Maße in der Regelungs- und Steuerungstechnik benutzt. Es steht darüber ein umfangreiches Schrifttum zur Verfügung [8...16], so daß an dieser Stelle

2. Im elektro-akustischen Verstärker spielen Phasenlage und -drehung keine oder nur eine untergeordnete Rolle. Im Steuer- bzw. Regelverstärker dagegen ist die Phasenlage von ausschlaggebender Bedeutung, da sie die Laufrichtung des Motors bestimmt. Die Verstärker arbeiten nur in zwei festliegenden um 180° verschobenen Phasenlagen, die lediglich in der Phase des Verstärkers beim Umspringen in die andere Lage Phasenfehler aufweisen können (siehe Abb. 1.32). Für derartige phasenempfindliche Verstärker in Rechengeräten muß die Phasenlage oft sehr genau auf Bruchteile eines Grades definiert sein, wenn man beispielsweise an die Einführung von Vektoren in den Verstärker denkt, deren Phasenverschiebungen gegenüber einander einen Hauptfaktor der Rechnung darstellen. <sup>1</sup>

Außer diesen beiden grundsätzlichen Forderungen an Niederfrequenz-Steuerverstärker treten noch weitere allgemeinere auf, die man insgesamt wie folgt zusammenstellen kann:

<sup>1</sup> Vgl. H. KINDLER: Beschreibung der zum Rechengerät gehörenden Verstärker (unveröffentlicht).

<sup>1</sup> Vgl. den Vortrag Prof. Dr. O. MOHR über Regelverstärker beim Deutschen Physikertag Berlin 1952.



Tabelle 4.

Geforderte Höchstgeschwindigkeit an der Arbeitsmaschine . . . . .	10°/s
Maximal zulässiger Fehler bei dieser Geschwindigkeit . . . . .	4 Min.
Dauernde Belastung der Arbeitsmaschine . . . . .	360 cm kp
Übersetzung zwischen Arbeitsmaschine und Stellmotor . . . . .	1: 1080
Erforderliche Leistungsabgabe des Stellmotors ( $\eta_G = 0,8$ ) . . . . .	7,7 W
Übersetzung zwischen Stellmotor und Tachometer-Generator . . . . .	2: 1
Leistungsbedarf: 150 VA/500 Hz und 150 VA/50 Hz	
Abgegebene Leistungen: Verstärker maximal . . . . .	25 VA
Verstärker bei optimaler Einstellung der Regelung . . . . .	21 VA
Stellmotor maximal . . . . .	850 cm p
Stellmotor bei optimaler Einstellung der Regelung . . . . .	740 cm p

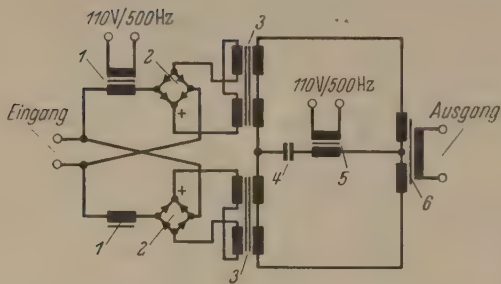
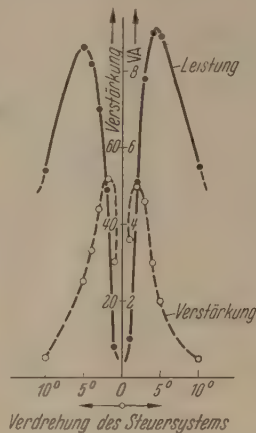


Abb. 15. Prinzipschaltbild und Kennlinien eines einstufigen magnetischen Verstärkers, ohne Vorhaltbildungen. 1 Speisetransformator im Steuerkreis; 2 Selengleichrichter; 3 Verstärkerdrosseln; 4 Anpassungskondensator; 5 Speisetransformator im Arbeitskreis; 6 Ausgangstransformator.



#### 4.3. Magnetischer Verstärker mit Leonard-Umformer.

Während man mit Röhren- oder Stromverstärkern durch Anwendung vieler Stufen eine sehr große Verstärkung erzielen kann, ist die Verstärkungsmöglichkeit von Magnetischen Verstärkern durch die Zeitkonstante der Verstärker ziemlich begrenzt, wenn man noch praktisch brauchbare Ergebnisse für Regel- oder Steuerzwecke erzielen will. Eine Verringerung der Zeitkonstante bringen zwar die im Abschnitt 3.3 angegebenen Schaltungen, die Dämpfung von Anlagen mit magnetischen Regelverstärkern infolge ihrer Fähigkeit

auf eine Beschreibung dieses Prinzips verzichtet und nur das Ergebnis eigener Untersuchungen an einem einstufigen magnetischen Verstärker wiedergegeben sei (Abb. 15).

Der Verstärker wurde mit einem Sollwerteinsteller gemäß Abb. 13 betrieben, und dem induktiven Geber eine Sinus-Drehbewegung aufgezwungen. Der Fehler dieser Versuchsanordnung wurde aus der oscillografierten Spannung des Steuersystems ermittelt. Das Ergebnis zeigt Tabelle 5.

Tabelle 5.

Geschw.- Grad/s	Beschleunigung Grad/s²	Mittlerer Fehler bei max. Geschw.		Kleinsten Fehler während einer ganzen Sinus- bewegung	Größten Fehler
		Grad	Beschl. Grad		Grad
3,5	2,4	0,4	0,9	0,1	1,9
7,0	4,9	0,3	1,4	0	2,0
13,9	9,7	0,7	3,0	0	3,5
17,4	12,1	0,9	3,9	0	4,3

Das Fehlen jeglicher Beschleunigungs-Aufschaltung ist an dem mit steigender Beschleunigung wachsenden Beschleunigungsfehler zu erkennen. Man kann abschließend feststellen:

a) Der Verstärker ist für Anlagen mit konstanter Geschwindigkeit von etwa 5 Grad/sec bis 7 Grad/sec brauchbar, wenn bis 0,3 Grad Fehler zugelassen werden.

b) Der Verstärker ist für Anlagen mit Beschleunigungsbefehlen im allgemeinen nicht verwendbar.

Werden an eine Anlage mit Magnetischem Verstärker größere Ansprüche hinsichtlich Geschwindigkeit und Beschleunigung gestellt, so wird man mehr Aufwand an Drosseln, Transformatoren und Gleichrichtern in Kauf nehmen müssen, und bei großen oder genauen Steuerungen wird man dann einen Leonard-Umformer mit Gleichstrom-Nebenschlußmotor als Stellmotor vorsehen.

zur Vorhaltbildung. Da hierzu aber eine gewisse Leistung benötigt wird, ist die Anwendung von Leonard-Umformern (Drossel-Generator-Verstärker mit Gleichstromnebenschlus-Stellmotor erforderlich).

In Abb. 13 ist das Prinzipstromlaufbild eines dinstufigen Verstärkers dargestellt, wobei analog zur Abb. 14 auch der Sollwerteinsteller sowie die Schaltung zur Dämpfung und Vorhaltbildung gegeben sind. Durch die von Sollwerteinsteller 1 ausgehenden Steuerbefehle fließt in der Primärwicklung des Eingangstransformators 2 ein Strom, der über eine Kombination eines Widerstandes 3 mit einem Kondensator 4 geleitet wird, um schädliche Rückmomente im Rotor des Steuersystems zu kompensieren. Durch den Eingangstransformator 2 wird der gesamte Verstärker vorher in den Abschnitten 4.1 und 4.2 zwei gleich aufgebaute Seiten aufgetrennt.

Der so aufgespaltene Steuerbefehl wird durch die Gleichrichter 5 gleichgerichtet und dient zur Gleichstrommagnetisierung der beiden ersten Verstärkerdrosseln.

Die Wechselstromwicklungen dieser beiden Drosseln werden nun, im Gegensatz zu dem im Abschnitt 4.2 geschilderten Verstärker, nicht durch den Verbrauch abgeschlossen, sondern der in ihnen fließende Strom wird durch die Gleichrichter 7 wieder gleichgerichtet und dient zur Vormagnetisierung einer zweiten Drosselstufe bestehend aus den Verstärkerdrosseln 8. Hierin Arbeitsstrom dient zur Erregung der beiden Felder 9 des Leonard-Generators 10<sup>1</sup>, muß also an

<sup>1</sup> Zweckmäßiger kann möglicherweise die Verwendung als Amplidyne bekannt gewordenen Verstärker-Maschine sein. Nach Literaturangaben [16], [17] ist ihre Erregerleistung im Verhältnis zur abgegebenen Leistung so gering, daß ihre Anwendung hinter einem Magnetischen Verstärker der beschriebenen Wirkungsweise große Vorteile bieten kann.



gleichgerichtet werden (Gleichrichter 11). Der Leonard-Generator 10 speist den Stellmotor 12, der Gleichstromnebenschlußmotor konstant erregt und seinerseits die zu steuernde Achse antreibt gleichzeitig das Steuersystem des Sollwerteinlers 1 nachdreht.

Zur Herabsetzung der zeitlichen Verzögerungen dienen im Abschnitt 3.3 besprochene Kunstschaltungen. Ein- und Auswärtige wird mittels der Kompensationsschaltung zwischen dem Arbeitskreis und dem Steuerkreis, die durch die Widerstände 13 eingestellt werden kann, eine erhebliche Steilheitssteigerung des Verstärkers (gerechnet vom Verdrehungswinkel des Steuersystems bis zum Anstieg der Generatorspannung) erreicht. Außerdem aber wird durch die Anordnung der D- und T-D-Motoren 15, 16, deren Beschleunigungs- und Geschwindigkeitsbefehle über die Widerstände in einem Vormagnetisierungskreis des ersten Verstärkerdrossels durchgeführt werden, eine Voreilung der Generatorspannung des Leonard-Generators 10 gegenüber seiner Spannung ohne diese Motoren erreicht, so daß Steuerbefehl und Generatoranordnung zeitlich und amplitudenmäßig richtig aufeinanderstimmt werden können.

Die mit Steueranlagen der geschilderten Art erhaltenen Ergebnisse waren gut. Bei Geschwindigkeiten von Beschleunigungen von  $6 \dots 8$  Grad/sec bzw.  $\text{rad/sec}^2$  wurden Fehler von 4 Minuten nicht überschritten. Die Anlagen fielen auch bei Geschwindigkeiten bis zu 20 Grad/sec nicht außer Tritt.

Der Aufwand an Transformatoren, Drosseln und Gleichrichtern ist jedoch sehr groß. Auch der Umstand, daß der Leonard-Umformer mit Rücksicht auf Genauigkeit der Anlage zu 100% überdimensioniert sein mußte, steht einer Verwendung derartiger Verstärker hindernd im Wege. Demgegenüber muß als Vorteil ihre geringe Störanfälligkeit bei hoher Genauigkeit gewertet werden. Ein Drossel-Generatorverstärker ist sofort betriebsklar und sowohl für Dauerbetrieb als auch für intermittierende Arbeits-

weise brauchbar. Zur genauen Steuerung bzw. Regelung großer Massen dürfte diese Ausführungsart auch im Zeitalter der Vakuum-Röhren noch mit Vorteil Verwendung finden können.

### 5. Zusammenfassung.

Die vorliegende Arbeit berichtet an Hand von Prinzipschaltbildern, Versuchsergebnissen und rechnerischen Untersuchungen über Bauformen und Übertragungsmittel für elektrische Regler bzw. Steuerungen, wobei die Grundsätze, die für den Bau von Lagereglern zu beachten sind, ausgeführt werden.

Im einzelnen werden drei Meßwertumformer (Umsetzer), zum Umsetzen elektrischer in mechanische Werte, und zwar der Sinus-Cosinus-Koordinatenwandler (1.3.4.2) der linearisierte Koordinatenwandler (1.3.4.3) und der Ferraris-Wechselstrommotor als Stellmotor (2.2), sowie drei phasenempfindliche Regelverstärker rechnerisch und experimentell untersucht.

**Literatur.** [1] Regelungstechnik, Begriffe und Bezeichnungen DIN 19226. — [2] KRÜSSMANN, A.: Feinwerktechnik 56, 132 (1952). — [3] LAUER, H., R. LESNIK und L. E. MATSO: Servomechanism Fundamentals, 1947. — [4] LEONARD, A.: Die selbsttätige Regelung in der Elektrotechnik. Berlin: Springer 1949. — [5] OPPELT, W.: Grundgesetze der Regelung. Wolfenbüttel Verlagsanstalt 1947. — [6] BÖGEL, K.: Ingenieur Arch. 12, 247 (1941). — [7] STENZEL, R.: ETZ 74, 33 (1953). — [8] KEINATH, Gg.: ATM V 3210 — 1 (1939). — [9] KRÄMER, W.: ETZ 58, 1309 (1937); ATM V 3213 — 3 (1939). — [10] RETUSS, K.: Arch. Elektrotechn. 33, 777 (1939). — [11] GEYGER, W.: ETZ 62, 849 (1941). — [12] GEYGER, W.: ATM Z 634 — 4 (1949). — [13] LAMM, U.: Asea.-J. 16, 66 (1939). — [14] LAMM, U.: Trans. Amer. Inst. electr. Engrs. 66, 47 (1947). — [15] SCHILLING, W.: ETZ 71, 7 (1950). — [16] Sonderheft der ETZ: 73, Heft 7 (1952). — [17] KÜBLER, E.: ETZ 72, 623 (1951).

Dr.-Ing. RUDOLF STENZEL,  
Physikalisch-Technische Reichsanstalt,  
Berlin-Charlottenburg 2, Abbe-Str. 2—12.

## Buchbesprechungen.

Lenz, F.: Meßtechnik für Funkingenieure. Wien: Springer 1952. 540 S., 13 Zahlentafeln und 399 Abb. 49,50.

Von mehrbändigen „Handbüchern“ abgesehen, bekamen sich Lehrbücher der funkttechnischen Arbeitsmethoden im allgemeinen auf bestimmte Frequenzbereiche, Bauelemente oder Anwendungsgebiete. Es scheint, daß die zunehmende Ausweitung des Gebiets eine Darstellung, umfassend und doch nicht zu umfangreich ist, aus praktischen und didaktischen Erwägungen verbietet.

Der Verfasser der „Einführung in die Funktechnik“ hat das Ziel gesetzt, trotz der scheinbar ungünstigen Auspizien mit dem vorliegenden Buch eine solche Darstellung zu liefern, und ein Kompendium der funkttechnischen Meß- und Untersuchungsverfahren geschaffen, das nach Inhalt und Umfang geeignet ist, weite Kreise anzusprechen und zumindest dem Gebiet der deutschsprachlichen Fachliteratur eine Lücke auszufüllen. Zahlreiche Schrifttumsangaben, die weitgehend auf die Originalarbeiten zurückgehen und den Stand der Technik bis 1950 nachweisen, verhelfen zu einem tiefen Eindringen in die Materie und machen das Buch nicht nur für den Praktiker wertvoll. Dargestellt sind die Grundlagen der Nachrichtenaufnahme bis zur Wiedergabe in der Form, die kommenden Meßverfahren und Untersuchungsverfahren einschließlich der erforderlichen Hilfsmittel und Meßgeräte selbst. Auch ausgesprochene Randgebiete, z. B. Raumakustik, werden berücksichtigt. Ein eigener Abschnitt ist der Meßtechnik der ultrakurzen Wellen gewidmet.

Vünschenswert wäre es, in einer Neuauflage der ständig wachsenden Bedeutung der Halbleiteranordnungen durch

Berücksichtigung ihrer speziellen Untersuchungsmethoden Rechnung zu tragen.

O. KAUFMANN.

Willers, F. A.: Mathematische Maschinen und Instrumente. Berlin: Akademie-Verlag 1951. VI, 318 S. und 258 Abb. Geb. DM 34,—.

Durch dieses Werk erweitert der Verfasser sein früheres Buch „Mathematische Instrumente“ von 1943 auf den heutigen Stand der Praktischen Mathematik. Der neue Titel betont die steigende Bedeutung der mathematischen Maschinen. Bei ihnen ist der Abschnitt über programmgesteuerte Rechenautomaten ganz neu hinzugekommen. Leider kann in ihm infolge seines geringen Umfangs von nur 25 Seiten dieses wichtige moderne Gebiet nicht vollständig behandelt werden, es werden aber doch dem Leser die grundlegenden Gedankengänge und Prinzipien, sowie die wichtigsten Ausführungsformen und gebauten Maschinen klar vor Augen geführt.

Überarbeitet und ergänzt ist der sehr ausführliche Abschnitt „Zeichnung von Kurven und Messungen an Kurven“, der die Koordinatographen, Pantographen, Kurvenmesser, Differentialatoren und verwandte Instrumente erschöpfend bringt.

Die Abschnitte über Planimeter, Analysatoren und Integratoren sind in der bewährten Form aus dem alten Buche übernommen und lediglich durch neu erschienene Instrumente ergänzt worden.

Dagegen hat der Verfasser den letzten Abschnitt „Differentialgleichungsmaschinen“ völlig neu gestaltet und dem jetzigen Entwicklungsstand entsprechend erweitert. An Hand von modernen ausgeführten Anlagen werden Prin-



zipien und Einzelheiten mit vielen Bildern und Skizzen erläutert und einige Anwendungsbeispiele gegeben. Die Bezeichnungen „Differentialgleichungsmaschine“ und „Differentialanalysator“ sollten nach dem heutigen Sprachgebrauch durch „Integrieranlage“ ersetzt werden.

Das Literaturverzeichnis ist um 400 Zitate bereichert worden und umfaßt jetzt 871 Schrifttumsangaben.

Das mit vielen Bildern und Skizzen ausgestattete Buch besticht durch seine klare Gliederung und meisterhafte Darstellung. Es gibt eine ausgezeichnete Übersicht über die heute vorhandenen maschinellen und instrumentellen Hilfsmittel der Praktischen Mathematik. Neben den Geräten selbst werden auch deren theoretische Grundlagen erschöpfend behandelt.

K.-J. LESEMANN.

**Angerer, E. v.: Technische Kunstgriffe bei physikalischen Untersuchungen.** Herausgegeben von HERMANN EBERT unter Mitwirkung zahlreicher Fachwissenschaftler. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn 1952. VIII, 352 S. u. 118 Abb. Geb. DM 14.80.

Endlich ist der seit 1939 unverändert abgedruckte „Angerer“ in neuer Bearbeitung erschienen. Leider ist es dem Verfasser nicht mehr vergönnt gewesen, diese Neubearbeitung selbst durchzuführen. Der Rahmen des Buches ist wesentlich weiter gespannt und da ein solches Praktikerbuch auf persönliche Erfahrung aufgebaut sein muß, diese aber kein Mensch auf dem Gesamtgebiet der Physik besitzen kann, ist der Stoff auf zwei Dutzend Fachleute aufgeteilt, aber durch den Herausgeber EBERT zu einem planvollen Ganzen zusammengefügt. Der eigentliche Inhalt des „Angerer“ ist großenteils auf den ersten Abschnitt „Werkstoffe (Darstellung, Handhabung)“ zusammengedrängt, daran schließen sich Spezialgebiete an wie Regeltechnik, Photozellen, Vakuum- und Hochdrucktechnik, Tiefsttemperaturphysik, Zählrohr und Nebelkammer, um nur einige Titel zu nennen. Besonders wichtig ist auch der Anhang: Sicherheitsmaßnahmen im Labor, DIN-Laborgerät und, heute besonders wertvoll, ein Adressenverzeichnis wichtiger Lieferfirmen. So stellt das Buch in seiner neuen Form ein unentbehrliches Hilfsbuch für jedes Labor und jeden Physiker dar. Freilich, es hat sein Gesicht verändert, es ist in seiner viel konzentrierteren Form nicht mehr für Anfänger geeignet, im Gegensatz zu dem alten „Angerer“ der jeden Handgriff so erläuterte, daß man förmlich den Verfasser hilfreich über die Schulter blicken sah.

G. Joos.

**Kirschstein, F. u. G. Krawinkel: Fernsehtechnik.** Stuttgart: S. Hirzel 1952. 288 S., 231 Abb. u. 5 Tafeln. DM 25.—.

Das Buch soll für Physiker und Elektrotechniker eine Einführung in das gesamte Gebiet der Fernsehtechnik geben. Die beiden Autoren haben an der Entwicklung des Fernsehens und an der Organisation des Fernseh-Rundfunks aktiv teilgenommen. Es darf deshalb mit Recht erwartet werden, daß eine solche, von Fachleuten geschriebene Einführung nur das wesentliche, und damit bleibende der Ergebnisse der letzten 25 Jahre bringt. Es ist den Verfassern in der Tat gelungen, eine ausgezeichnete Übersicht über die zahlreichen Teilprobleme des Fernsehens zu geben. Die Darstellung ist überall sehr klar und lebendig und setzt wenig an mathematischen Kenntnissen voraus.

Es wäre m. E. erwünscht, wenn die eigentlichen physikalischen Grundlagen des Fernsehens, wie Photoeffekt, Sekundärelektronen-Emission, Phosphore u. dgl. in geschlossenen Kapiteln und wesentlich ausführlicher als bisher behandelt werden würden. So sind z. B. die Verhältnisse bei der Sekundärelektronen-Emission auf verschiedene Stellen des Buches verstreut.

Einige kritische Bemerkungen: Bei der Entstehung des Nutz- und des Störsignals des Ikonoskopes spielt nach den neuesten Erkenntnissen die „Raumladung“ keine Rolle. — Die obere Frequenzgrenze eines Sekundärelektronen-Vervielfachers ist nicht durch die Laufzeit der Elektronen zwischen Photokathode und Auffang-Elektrode gegeben, sondern nur durch die Laufzeitunterschiede der Elektronen mit gleicher Startphase. — Für die Abtastung von Filmen mittels Kathodenstrahlröhren (Flying spot scanner) steht heute in der UV-Emission des ZnO eine Lichtquelle zur Verfügung, die

auch für 625 Zeilen ohne Trägheit arbeitet, bei der keinerlei Entzerrung des Signals notwendig ist.

Die Literaturangaben dürften wesentlich ausführlicher sein. So wird bei der Behandlung des Photoeffektes nur das gewiß sehr gute Buch von GUDDEN (1923) hingewiesen. Neuere Bücher oder Berichte über Photoemission (z. B. Buch von P. GÖRLICH) sind nicht genannt.

Trotz solcher Schönheitsfehler kann das Buch wärmstens empfohlen werden.

A. KAROLU

**Otting, W.: Der Raman-Effekt und seine analytische Anwendung.** Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1952. 161 S. und 33 Abb. DM 12.60.

Zu den bisherigen Bändchen der „Anleitungen für Chemische Laboratoriumspraxis“ kommt nun dieses Laboratoriumsbuch über den RAMAN-Effekt hinzu.

Zunächst werden in einem besonderen Kapitel die wichtigsten theoretischen Grundlagen in verständlicher Form gebracht und alles für den Praktiker wesentliche berichtet. Hier sind besonders wertvoll die zahlreichen Tabellen graphischen Darstellungen, die es auch dem weniger Geübten ermöglichen, RAMAN-Spektren nicht nur zur Analyse, sondern auch zur Konstitutionsbestimmung heranzuziehen. Denn hierin liegt ja ein wesentlicher Vorteil der RAMAN-Spektren für den organischen Chemiker. Man kann hoffen, daß diese sehr klare und übersichtliche Darstellung auch geben wird, daß die RAMAN-Spektren auch vom rein synthetischen Organiker häufiger als Hilfsmethode bei der Konstitutionsbestimmung herangezogen werden.

In den weiteren Kapiteln, die sich mit der experimentellen Methodik befassen, sind gut ausgewählte praktische Hinweise auf Lichtquellen, Küvetten für Normal- und temperatur- und Auswertemethoden enthalten. Auch die wichtigsten Anordnungen für Polarisationsmessungen werden besprochen. Die Vorbehandlung der Substanz wird ebenfalls eingehend behandelt, was um so wichtiger ist, als fahrlässig in der ungenügenden Reinheit oder in ungenügenden Unterdrückung der Fluoreszenz viele erfolgreiche in der Ramanspektroskopie begründet liegen. Wo hin wird die qualitative und quantitative Analyse mit den Anwendungsbereichen und Fehlerquellen diskutiert.

Im ganzen ist das Buch von einem erfahrenen Praktiker geschrieben. Für den anwendenden Chemiker in Wissenschaft und Industrie ist es sehr wertvoll und man kann eine weite Verbreitung wünschen. Das Büchlein eignet sich auch als Hilfsbuch im physikalisch-chemischen Praktikum.

G. SCHNEIDER

**Zimen, K. E.: Angewandte Radioaktivität.** Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1952. Mit einer Einführung von OTTO HAHN, 45 Abb. u. 1 Tafel. VIII, 124 S. Geb. DM 18.80.

Eine große Anzahl von Radioisotopen der verschiedensten Eigenschaften und Elemente sind heute in ausreichenden Mengen und zu erschwinglichen Preisen für wissenschaftliche Untersuchungen zugänglich geworden. Die weitere fruchtbare Entwicklung und Anwendung der radioaktiven Methoden wird nun in erster Linie davon abhängen, wie schnell die Zahl der Mediziner, Techniker und Forscher zunimmt, die diese Methoden erfolgreich anwenden können. Der Verfasser, ein Schüler OTTO HAHNS, will mit seiner Schrift einen Beitrag liefern zu dieser Entwicklung und gibt hier neben bekannten klassischen Büchern über die natürliche Radioaktivität die erste moderne Darstellung der angewandten Radioaktivität in deutscher Sprache. Zum Verständnis des Ganzen werden im ersten Teil des Buches die grundlegenden Tatsachen der Radioaktivität und der Kernreaktionen vorgebracht. Ein zweiter Teil bringt dann die Darstellung der prinzipiellen Möglichkeiten für die Anwendung der radioaktiven Atomarten als Strahlenquellen und Leitstoffe (radioaktive Indikatoren). Es werden zahlreiche Beispiele und Hinweise für Anwendungsmöglichkeiten in Biologie, Medizin, Chemie, Physik, Technik und Industrie aufgeführt. Tabellen und Zahlenangaben aus der Praxis des radioaktiven Arbeitens, wie auch umfangreiche Literaturhinweise erhöhen den Wert des Buches, das sich als erste Einführung in das Gebiet sicher viele Freunde erwerben wird.

H. EWA



## Streukapazität bei hochdielektrischen Substanzen.

Von WALTER HEYWANG, Karlsruhe.

(Mitteilung aus dem Werkstoffhauptlaboratorium der Siemens & Halske A.-G.)

Mit 1 Textabbildung.

(Eingegangen am 6. Dezember 1952.)

Da die elektrischen Feldlinien aus hochdielektrischem Material praktisch nicht austreten können, steht nicht für die Feldstreuung bei HDK-Kondensatoren nur der vom Dielektrikum erfüllte Raum berücksichtigt zu werden<sup>1</sup>. Bei bis zum Rande kontaktierten Proben (Scheiben, Röhren) treten also praktisch keine Streukapazitäten auf, so daß eine genügend exakte DK-Bestimmung leicht möglich ist. tritt aber in der Praxis oftmals die Frage nach der Streukapazität auf, wenn bei Röhren- oder Scheibenkondensatoren die Elektroden nicht bis zum Rande reichen, so daß es von Interesse erscheint, sie für diese Fälle zu berechnen.

Der Kondensator mit einseitig geradlinig begrenzten Elektroden.

Das Streufeld.

Die untere Begrenzung der unendlich ausgedehnten Dielektrikumscheibe liege in der Ebene  $z=0$ , die obere in der Ebene  $z=d$ . Die untere Kontaktierung gehe aus dem Unendlichen bis zur Geraden  $x=-b/2$ , die obere bis zur Geraden  $x=+b/2$ . Die untere Elektrode habe das Potential  $\varphi=0$ , die obere das Potential  $\varphi=1$ . (Vgl. Abb. 1.)

Da  $\varphi$  unter diesen Voraussetzungen nicht von  $y$  abhängt, ist die LAPLACESche Differentialgleichung

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

mit folgenden Randbedingungen zu lösen:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= 0 \quad \text{für } z=0 \quad -b/2 < x < \infty \\ \varphi &= 1 \quad \text{für } z=d \quad +b/2 < x < \infty \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 \quad \text{für } z=0 \quad -\infty < x < -b/2 \\ &\quad \text{und } z=d \quad -\infty < x < +b/2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Die letzte Randbedingung ist erfüllt, wenn man das Dielektrikum in  $z$ -Richtung ins  $\infty$  fortsetzt und gleichzeitig die Beläge mit dem zugehörigen Potential periodisch im Abstand  $2d$  wiederholt. Die verbleibenden Randbedingungen (2) werden damit periodisch mit  $2d$ . Diese Periodizität läßt sich durch die konforme Abbildung

$$\left. \begin{aligned} u &= e^{\frac{\pi x}{d}} \cos \frac{\pi z}{d} \\ v &= e^{\frac{\pi x}{d}} \sin \frac{\pi z}{d} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

<sup>1</sup> Der Streuanteil des Außenraumes wird in erster Näherung gegenüber dem Luftkondensator um den Faktor  $1/\epsilon$  vermindert.

<sup>2</sup> Durch diese Normierung entsprechen sich Zusatzladung und Streukapazität.

wieder unterdrücken:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= 0 \quad \text{für } v=0, \quad e^{-\frac{\pi b}{2d}} < u < \infty \\ \varphi &= 1 \quad \text{für } v=0, \quad -\infty < u < -e^{\frac{\pi b}{2d}}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Eine weitere konforme Abbildung auf elliptische Koordinaten

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha \operatorname{Co} \xi \cos \eta + \beta \\ v &= \alpha \operatorname{Sin} \xi \sin \eta \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

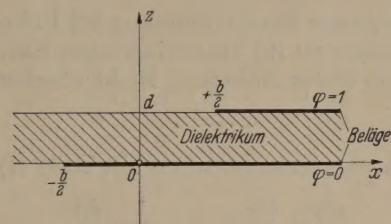


Abb. 1. Kondensator mit unterschiedlichen Belägen.

mit

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \operatorname{Co} \frac{\pi b}{2d} \\ \beta &= -\operatorname{Sin} \frac{\pi b}{2d} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

vereinfacht die Randbedingungen nochmals:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= 0 \quad \text{für } \eta=0 \\ \varphi &= 1 \quad \text{für } \eta=\pi. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Diese Randbedingungen sind unabhängig von  $\xi$ , so daß die Lösung der gegen die konformen Abbildungen invarianten Differentialgleichung (1) einfach lautet:

$$\varphi = \frac{\eta}{\pi}. \quad (8)$$

B. Streukapazität.

Die Kapazität  $c$  des Kondensators pro cm Tiefe ergibt sich durch Integration der dielektrischen Verschiebung längs eines Belags:

$$\frac{c}{\epsilon_0 \epsilon} = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-\frac{b}{2}}^L \frac{\partial \varphi}{\partial z} dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{L}{d} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{2}{\operatorname{Co} \frac{\pi b}{2d}}. \quad (9^3)$$

Berechnet man die Kapazität des Kondensators aus der kürzeren Elektrode, so ergibt sich für die Streukapazität des Randes pro cm Tiefe

$$\frac{c_2}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{4}{1 + e^{-\pi |b|/d}}. \quad (9')$$

<sup>3</sup> Es ist günstig, das  $\infty$  gedachte  $L$  als Länge des Kondensators beizubehalten, wobei jedoch nur der im Endlichen gelegene Rand Feldstreuung aufweisen soll.



Sie liegt daher zwischen den Werten

$$\frac{c_2}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{\ln 2}{\pi} = 0,22 \quad (9a)$$

für gleichlange Elektroden und

$$\frac{c_2}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{\ln 4}{\pi} = 0,44 \quad (9b)$$

für stark unterschiedliche Elektroden.

Gleichzeitig gibt (9') ein Maß für die Breite des Streubereiches: Bei extrem ungleichmäßiger Kontaktierung ist der Streuprozeß in einem Bereich der Breite  $d$  von der kürzeren Elektrode aus gerechnet bis auf ca. 8%, in einem Bereich der Breite  $2d$  bis auf ca. 1% abgeklungen. Bei gleich langen Elektroden gilt das gleiche, wenn man  $d$  durch  $d/2$  ersetzt, d. h. ist der Abstand zwischen Scheiben- und Elektrodenrand größer als  $d$ , so hat der Scheibenrand keinen Einfluß mehr auf die Streukapazität.

## II. Korrekturen bei gekrümmten Rändern.

Die infolge der Randkrümmung bei Röhren und Kreisscheibchen an (9) anzubringenden Korrekturen lassen sich in erster Näherung leicht abschätzen.

### A. Röhren.

Bei Röhrenkondensatoren gilt statt (1)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{1}{r_i + z} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (10)$$

wenn  $r_i$  den Innenradius des Röhrens darstellt.

Zur Lösung dieser Gleichung entwickelt man

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1, \quad (11)$$

wobei sich  $\varphi_0$  aus (8) ergibt durch Normierung des Potentials im Unendlichen auf 0<sup>1</sup>:

$$\varphi_0 = \frac{1}{\pi} \left( \eta - \arccos \Im g \frac{\pi b}{2d} \right). \quad (12)$$

Mit (11) geht (10) für  $r_i \gg d$  unter Vernachlässigung kleinerer Glieder über in

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = -\frac{1}{r_i + z} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}. \quad (13)$$

Durch Anwendung des GREENSchen Integralsatzes folgt unter Berücksichtigung der Randbedingungen (2) für  $\varphi$  und  $\varphi_0$ :

$$\left. \begin{aligned} \int \varphi_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} d\sigma &= - \int \frac{1}{2(r_i + z)} \frac{\partial \varphi_0^2}{\partial z} dv = \\ &= - \pi \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^L (\varphi_0^2(x, d) - \varphi_0^2(x, 0)) dx, \end{aligned} \right\} \quad (14)^2$$

wobei das linke Integral über die Beläge zu erstrecken ist.

Nun gilt allgemein

$$\frac{C}{\varepsilon \varepsilon_0} = \int \varphi_0 \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) d\sigma$$

<sup>1</sup> Diese Normierung ist notwendig wegen der folgenden Anwendung des GREENSchen Integralsatzes.

<sup>2</sup>  $\frac{\partial}{\partial n}$  bedeutet Differentiation in Richtung der Flächennormalen.

oder mit (9), (12) und (14)

$$\left. \begin{aligned} \frac{C}{\varepsilon \varepsilon_0} &= \frac{2\pi}{d} (r_i + d/2) \left( L + \frac{d}{\pi} \ln \frac{2}{\Im g \frac{\pi b}{2d}} \right) + \\ &+ \frac{2d}{\pi} \left( \arcsin \Im g \frac{\pi b}{2d} \right) \ln \frac{2}{\Im g \frac{\pi b}{2d}} + \\ &+ \pi b \left( \frac{1}{4} + \frac{\arcsin^2 \Im g \frac{\pi b}{2d}}{\pi^2} \right) - \\ &- \frac{d}{\pi^2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left( t + \arcsin \Im g \frac{\pi b}{2d} \right)^2 \frac{d \sin t}{\sin t + \Im g \frac{\pi b}{2d}} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Dabei entspricht der erste Term der nach (9) erwartenden Kapazität, wenn die Randkrümmung nicht berücksichtigt wird, während die Zusatzterme den Krümmungseffekt wiedergeben. Sie haben im Falle gleich langer Elektroden den Wert

$$C_3 = 0, \quad (16)$$

im Falle weit überstehender innerer bzw. äußerer Elektrode den Wert

$$C_3 = \pm 0,85 d \varepsilon \varepsilon_0. \quad (16)$$

### B. Kreisscheiben.

Bei Kreisscheiben ist (1) zu ersetzen durch

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (17)$$

Im Innern der Kreisscheibe ergibt sich für große Scheibenradien das bekannte Potential

$$\varphi_0 = \frac{z}{d} - \frac{1}{\pi} \arccos \Im g \frac{\pi b}{2d}. \quad (18)$$

Man darf daher das gesamte Potential durch (1) annähern, wenn man

$$r = R - x \quad (19)$$

( $R$  = mittlerer Radius der Elektroden,  $b$  = Differenz der Elektrodenradien) setzt. Durch Anwendung einer entsprechenden Entwicklung erhält man wiederum nach dem GREENSchen Satz

$$\int \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} r dr = -\frac{1}{2} \int_0^d \int_0^d \frac{\partial \varphi_0^2}{\partial r} dr dz. \quad (20)$$

Die linke Seite ist über eine Elektrode zu erstrecken und ergibt bis auf den Faktor  $2\pi \varepsilon \varepsilon_0$  die gesuchte Zusatzkapazität  $C'_3$  infolge der Randkrümmung. So lange die Voraussetzungen für (18) erfüllt sind, läßt sich die rechte Seite leicht auswerten:

$$\left. \begin{aligned} C'_3 &= \varepsilon \varepsilon_0 \pi d \times \\ &\times \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{\pi} \arccos \Im g \frac{\pi b}{2d} + \left( \frac{1}{\pi} \arccos \Im g \frac{\pi b}{2d} \right)^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Für die wichtigsten Sonderfälle gleichgroßer Elektroden bzw. einer weit überstehenden Elektrode folgt damit

$$C'_3 = \varepsilon \varepsilon_0 \pi \frac{d}{12}, \quad (21)$$

bzw.

$$C'_3 = \varepsilon \varepsilon_0 \pi \frac{d}{3}. \quad (21)$$

<sup>3</sup> Hierbei wurde gleich berücksichtigt, daß  $\varphi_0$  im Unendlichen verschwinden muß bei der Anwendung des GREENSchen Integralsatzes.